

ARCHIEF

*exempl. 1.*

*To Professor Gerritsma  
with the author's compliments!*

*H. Nowacki*

**Lab. v. Scheepsbouwkunde  
Technische Hogeschool  
Delft**

**Potentialtheoretische Strömungs-  
und Sogberechnungen  
für schiffsähnliche Körper**

Von

**Dipl.-Ing. Horst Nowacki, Berlin**

---

Von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität Berlin zur Verleihung der akademischen  
Würde Doktor-Ingenieur genehmigte Dissertation

Berichter: Prof. Dr.-Ing. Hans Amtsberg · Berichter: Prof. Dr.-Ing. Erwin Metzmeier

Eingereicht am 24. Juli 1963 · Mündliche Prüfung am 18. November 1963

Berlin 1963

D 83

# Inhaltsübersicht

	Seite
1. Einleitung . . . . .	2
2. Mathematische Darstellung der Schiffsform . . . . .	4
2.1 Übersicht über verschiedene Möglichkeiten der mathematischen Schiffsdarstellung . . . . .	4
2.2 Wahl einer problemgemäßen Darstellungsmethode . . . . .	7
2.3 Beispiel . . . . .	10
3. Berechnung der Potentialströmung um einen gegebenen schiffsähnlichen Körper . . . . .	12
3.1 Analytische Formulierung der Aufgabe . . . . .	12
3.2 Lösungsverfahren . . . . .	14
3.3 Beispiel für die Lösung der Integralgleichung der reinen Körperumströmung	16
3.4 Berechnung des Strömungsfeldes . . . . .	22
4. Berücksichtigung der Propellerströmung . . . . .	23
4.1 Gedankenmodell für den Propeller . . . . .	23
4.2 Berücksichtigung in der Integralgleichung . . . . .	24
4.3 Beispiel für die Lösung der Integralgleichung der Körperumströmung im Propellerstörfeld . . . . .	25
4.4 Berechnung der Wechselwirkungsgrößen . . . . .	25
5. Ergebnisse . . . . .	27
5.1 Reiner nomineller Verdrängungsmittstrom . . . . .	27
5.2 Reiner effektiver Verdrängungsmittstrom . . . . .	27
5.3 Gedanken über die übrigen Mittstromgrößen . . . . .	31
5.4 Reiner Verdrängungssog . . . . .	31
5.5 Gedanken über die übrigen Soggrößen . . . . .	32
6. Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	33
7. Schrifttum . . . . .	34
8. Bezeichnungen . . . . .	35
9. Anhang . . . . .	36
9.1 Darstellung und Eigenschaften von Lewis-Spanten . . . . .	36
9.2 Vergleich mit dem Verfahren von Hess und Smith . . . . .	38

Potentialtheoretische Strömungs-  
und Sogberechnungen  
für schiffsähnliche Körper

## 1. Einleitung

Wenn ein physikalisches Erscheinungsbild aus mehreren Ursachen hervorgeht, so genügt es für seine Erklärung nicht, die von den einzelnen Ursachen unmittelbar ausgehenden Wirkungen zu untersuchen, sondern es müssen auch die zwischen den einzelnen Ursachen bestehenden, miteinander sehr bedeutenden Wechselwirkungen berücksichtigt werden.

Dafür gibt es auch in der Schiffstheorie eine Reihe von Beispielen. So wird in der Schiffshydrodynamik das gesamte bei der Umströmung eines Schiffskörpers herrschende Strömungsfeld nach den verschiedenen beteiligten Kräfteklassen und somit Ähnlichkeitsparametern gedanklich in folgende Einzelfelder aufgeteilt:

1. die Verdrängungsströmung (Potentialströmung: Allgemeines Newtonsches Ähnlichkeitsgesetz),
2. die Zähigkeitsströmung (Reynoldssches Ähnlichkeitsgesetz) und
3. die Wellenströmung (Froudesches Ähnlichkeitsgesetz).

Bekanntlich unterliegen aber vor allem Verdrängungs- und Zähigkeitsströmung einer sehr starken Wechselwirkung derart, daß einerseits die potentialtheoretische Druckverteilung besonders im hinteren Schiffsbereich durch Zähigkeitseinflüsse verändert wird, während andererseits die Verhältnisse in der Grenzschicht von der aufgeprägten Druckverteilung und damit von der Schiffform abhängig sind. Bei der Erforschung des Schiffswiderstandes, die in Theorie und Modellversuchspraxis von der erwähnten Aufteilung fruchtbaren Gebrauch gemacht hat, steht man aus diesen Gründen heute im Stadium verfeinerter Untersuchungen vor der Aufgabe, die Wechselbeziehungen zwischen Verdrängungs- und Zähigkeitsströmung eingehender zu analysieren. Entsprechende Bemühungen sind auf die Feststellung der Wechselwirkungen zwischen Zähigkeits- und Wellenströmung gerichtet.

Ähnliche Wege wie die Widerstandsforschung beschreitet die artverwandte, für die Wirtschaftlichkeit und Betriebssicherheit des Schiffsantriebs bedeutende Theorie der Wechselwirkung zwischen Schiff und Propeller. Hier ist die noch etwas umfassendere Aufgabe gestellt, zusätzlich zu den drei genannten Strömungsfeldern das vom Antriebsorgan hervorgerufene zu berücksichtigen und dessen Wechselbeziehungen mit den anderen zu untersuchen. Als kennzeichnende Größen für diese Wechselwirkung werden gewöhnlich definiert:

1. der Sog; das ist die Resultierende der durch die Wirkung des Propellers am Schiffskörper angreifenden hydrodynamischen Kräfte, und
2. der Mitstrom; das ist das durch den Körper in seiner Umgebung hervorgerufene Geschwindigkeitsfeld. (Man unterscheidet diesbezüglich zwischen dem nominellen Mitstromfeld, das ist die in der Umgebung des Körpers ohne Propeller vorliegende Geschwindigkeitsverteilung, und dem bei arbeitendem Propeller herrschenden effektiven Mitstromfeld.)

Nach einer zuerst von Fresenius [1] gebrauchten, später fruchtbar erweiterten Arbeitshypothese (siehe u. a. [2] bis [7]) wird den Größen Sog und Mitstrom eine den Strömungsfeldern entsprechende Aufteilung gegeben:

1. Verdrängungsmitstrom, Verdrängungssog;
2. Reibungsmitstrom, Zähigkeitssog;
3. Wellenmitstrom, Wellensog.

Um ferner der erwähnten Wechselbeziehung zwischen Verdrängungs- und Zähigkeitsströmung Rechnung zu tragen, die in etwas modifizierter Form selbstverständlich auch in Gegenwart des

<sup>1</sup> Von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität Berlin genehmigte Dissertation.  
Berichter: Prof. Dr.-Ing. H. Amtsberg, Prof. Dr.-Ing. E. Metzmeier.

Propellers auftritt, kann man begrifflich zwischen dem reinen, d. h. in reiner Potentialströmung herrschenden und dem virtuellen Verdrängungsmittstrom bzw. -sog unterscheiden, der bei gleichzeitig auftretender Zähigkeitsströmung vorliegt.

Die Abb. 1 gibt einen Überblick über die damit definierten Begriffe und die für die verschiedenen Größen eingeführten Symbole. Wegen weiterer Einzelheiten der Begriffsbildung wird auf die zusammenfassende Darstellung von Amtsberg [7] verwiesen.

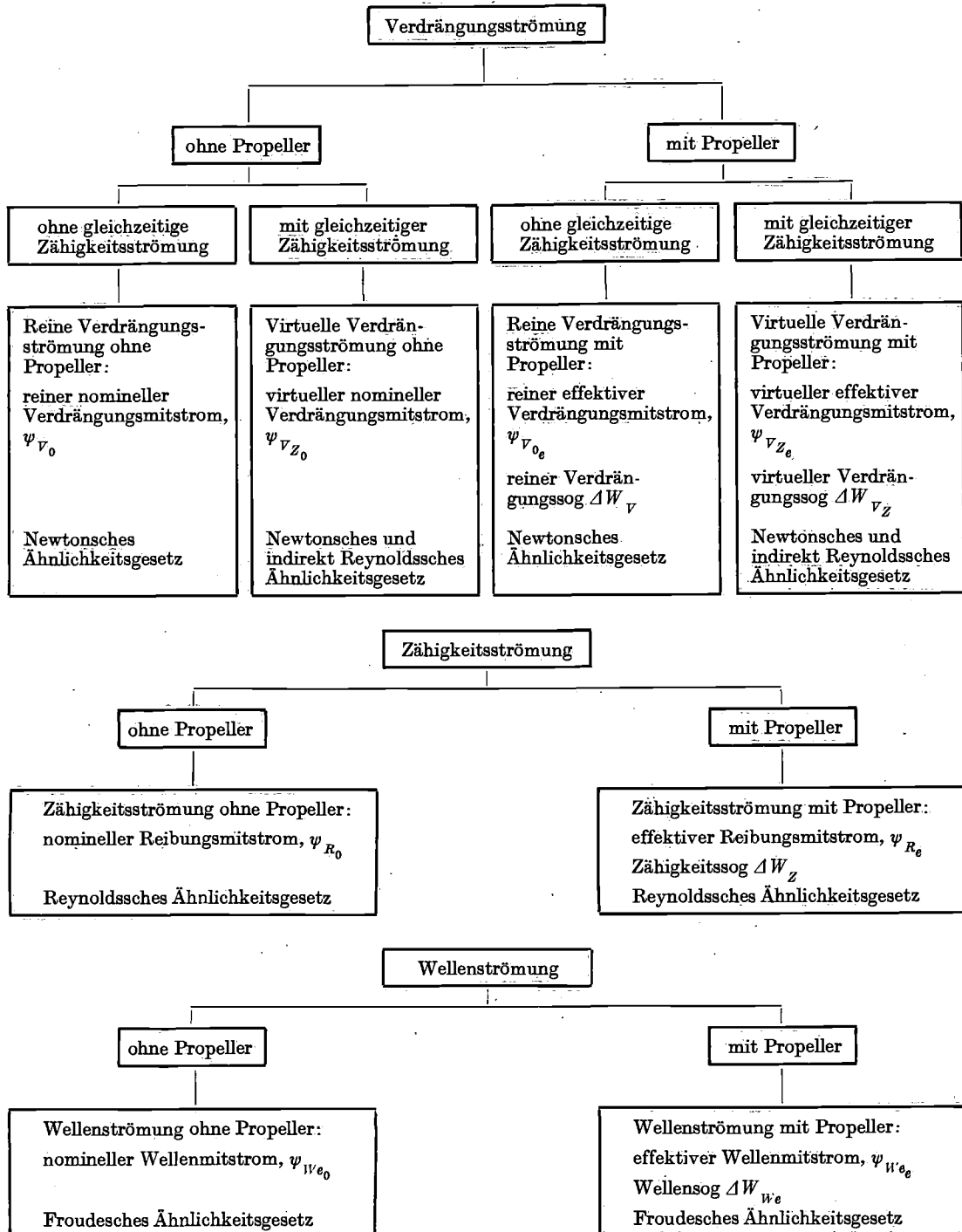


Abb. 1. Begriffsschemata für Verdrängungsströmung, Zähigkeitsströmung und Wellenströmung.

Die erläuterte Aufteilung in Grundströmungsfelder ermöglicht die systematische Erforschung des Komplexes der Wechselwirkungszusammenhänge auf der Grundlage folgender Methodik: Das im Versuch ermittelte Gesamterscheinungsbild wird mit den durch potentialtheoretische Rechnung bestimmten Größen in geeignete Beziehung gesetzt. Zur Beurteilung der auf diesem Wege nicht zu erschließenden Anteile — wie z. B. des virtuellen, effektiven Verdrängungsmittstroms — wird außerdem die logische Argumentation herangezogen. Ferner bedient man sich mit Vorteil des Hilfsmittels, die Einflüsse der Wellenströmung durch Vergleich vom Strömungszustand an der Wasseroberfläche mit dem entsprechenden für den tiefgetauchten Körper auszu-sondern bzw. auszuschalten.

Durch vielfältige Untersuchungen auf der Basis dieser Methodik hat der Schiffshydrodynamiker inzwischen eine recht eingehende Kenntnis des Charakters der Wechselwirkungserscheinungen und einen gewissen Überblick über die Abhängigkeit der einzelnen Wechselwirkungsgrößen von ihren Parametern gewonnen. Jedoch trennen ihn auch heute noch einige nicht ganz geklärte Zusammenhänge von dem erstrebenswerten Ziel der unmittelbaren Voraussage von Sog und Mitstrom unter schiffsähnlichen Verhältnissen. Insbesondere ist die Theorie noch nicht zu konkreten, dem Konstrukteur dienlichen Aussagen über den zahlenmäßigen Einfluß bestimmter Formgebungsmaßnahmen etwa im Hinterschiffsbereich auf Sog und Mitstromfeld in der Lage.

Dies erklärt sich vor allem daraus, daß man sich bei den rechnerischen Untersuchungen zunächst folgerichtig auf einfache, für zahlreiche grundlegende Fragen aussagekräftige Ersatzkörper beschränkt hat, denen es jedoch an manchen beim Schiff wichtigen Eigenschaften gebricht. So kann beispielsweise der Einfluß eines peripheral ungleichförmigen Mitstromfeldes auf den Sog, der nach Meinung von Dickmann [6] sehr bedeutend ist, bei Untersuchungen an Rotationskörpern (siehe z. B. [7], [8], [9]) nicht in Erscheinung treten. Auch die Untersuchungen von Pohl [10] an einem zylindrischen Ersatzkörper elliptischen Querschnitts, bei denen in der Propellerebene stark ungleichförmige, schiffsähnliche Mitstromfelder auftreten, konnten in dieser Hinsicht noch keine abschließende Klärung herbeiführen.

Als nicht völlig geklärt muß ferner die Frage nach Art und Größe des Zähigkeitszugs am Schiff gelten. Zwar kann nach vorherrschender Meinung ([11], [6], [7], [9], [10]) der Zähigkeitszug im Vergleich zum Verdrängungszug normalerweise nur geringe Beträge erreichen; jedoch bleibt diese Auffassung nicht unwidersprochen ([13], [14]), und vor allem von seiten der Versuchspraxis wird mitunter auf Maßstabseinflüsse auf den Sog in einer von der Theorie nicht ganz zu erklärenden Tendenz hingewiesen.

Aus dieser Situation ergibt sich die Grundidee der vorliegenden Arbeit: Um im bewährten Wechselspiel zwischen potentialtheoretischer Berechnung und Experiment Ergebnisse zu erzielen, die sich unmittelbar auf die Schiffsumströmung anwenden lassen, soll der Schritt vom Ersatzkörper zum schiffsähnlichen Körper beliebig vorzugebender Form getan werden.

Der zunächst und vom Verfasser unmittelbar zu leistende Beitrag soll in der potentialtheoretischen Untersuchung der reinen Verdrängungsströmung ohne und mit Propellereinfluß bestehen.

Die damit gestellte Aufgabe läßt sich zweckmäßig in drei Teilaufgaben zerlegen:

1. Mathematische Darstellung der Schiffsoberfläche in einer möglichst übersichtlichen und für die Verarbeitung in elektronischen Rechengeralten geeigneten Weise, mit deren Hilfe die systematische Variierung der Schiffsförmung möglich sein soll.
2. Errechnung der räumlichen Potentialströmung um einen tiefgetauchten Körper gegebener Form.
3. Zusätzliche Berücksichtigung der Propellerströmung und Berechnung der Wechselwirkungsgrößen.

## 2. Mathematische Darstellung der Schiffsförmung

### 2.1 Übersicht über verschiedene Möglichkeiten der mathematischen Schiffsdarstellung

Die Aufgabe, analytische Ausdrücke für die Oberfläche eines Schiffskörpers anzugeben, ist in der Vergangenheit aus sehr unterschiedlichen Motiven heraus und daher auch mit sehr verschiedenartigen Methoden aufgegriffen worden. Die ersten Bemühungen von Taylor [15] und auch die späteren fruchtbaren Arbeiten von Weinblum (z. B. [16] bis [18]) waren hauptsächlich darauf gerichtet, die Schiffsförmung in all ihrer Vielgestaltigkeit durch geeignete Parameter zu beschreiben und systematisch zu variieren, um dadurch die experimentellen und analytischen Untersuchungen auf dem Gebiete der Schiffstheorie unter ein ordnendes Prinzip zu stellen. Da viele wesentliche Eigentümlichkeiten der Schiffsförmung mit Hilfe zweidimensionaler Kurven wie der

Wasserlinien oder Spanten sowie der Spantflächenkurve zu erfassen sind, war es das Hauptziel dieser Arbeiten, solche Kurven in Abhängigkeit von den wesentlichen Formparametern analytisch darzustellen. Die Erfolge dieser Bemühungen sind bekannt und sollen hier nicht näher erörtert werden (s. zu diesem Thema die zusammenfassenden Darstellungen von Weinblum [18] und Saunders [19]).

Im letzten Jahrzehnt hat die zunehmende Verbreitung des Digitalrechners auch dem Problem der mathematischen Schiffskörperdarstellung neue Impulse gegeben. Zum einen profitiert heute die Konstruktionspraxis in stark zunehmendem Maße bei elektronischen Kurvenblatt- und Stabilitätsberechnungen oder schiffbaulichen Hilfsrechnungen ähnlicher Art von der zumindest stückweisen analytischen Erfassbarkeit der Schiffsoberfläche. Zum andern ist die Herstellung mathematischer Linienrisse auf Grund gegebener Vorprojekt-Aufmaße realisierbar geworden [20]. Schließlich ist auch die allgemeine Grundaufgabe, eine beliebige gegebene Schiffsoberfläche durch analytische Zusammenhänge zu approximieren, auf verschiedenen Wegen in Angriff genommen worden. Da zwischen dieser Aufgabe und dem vorliegenden Problem eine gewisse Verwandtschaft besteht, soll hierauf etwas näher eingegangen werden.

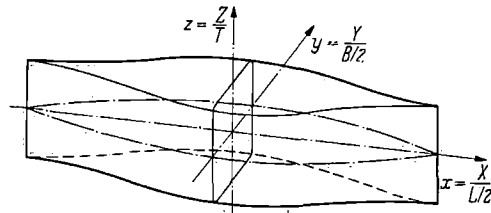


Abb. 2. Koordinatenfestlegung am Beispiel eines Doppel-Schiffskörpers.

Gegeben sei also die Unterwasserform eines Schiffes, und zwar entweder durch Linienriß oder durch eine andere genügend eindeutige Darstellung des Verlaufs der Schiffsaufmaße. Gesucht wird eine die Oberfläche darstellende Funktion  $y = f(x, z)$  (explizite Form) oder  $F(x, y, z) = 0$  (implizite Form).

Das kartesische Koordinatensystem  $X, Y, Z$  ist dabei gemäß Abb. 2 (die den durch Spiegelung einer Unterwasserform an der Schwimmebene erzeugten Doppel-Schiffskörper darstellt) im Halbierungspunkt der Schwimmebenenlänge aufgepflanzt und wird mit den Schiffshauptabmessungen normiert, so daß man die folgenden dimensionslosen Koordinaten<sup>1</sup> erhält:

$$x = \frac{X}{L/2}; y = \frac{Y}{B/2}; z = \frac{Z}{T} \tag{2.1}$$

Für die in späterem Zusammenhang häufig gebrauchten Ableitungen gilt entsprechend:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y_x = \frac{L}{B} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X}; \frac{\partial y}{\partial z} = y_z = \frac{2T}{B} \cdot \frac{\partial Y}{\partial Z} \tag{2.1a}$$

Von den für die Lösung dieser Aufgabe in Betracht kommenden Näherungsverfahren könnte die unmittelbare Entwicklung der Schiffsoberfläche in eine Potenzreihe

$$y = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i z^j \tag{2.2}$$

vielleicht als das naheliegendste angesehen werden. Dabei sind die Koeffizienten  $a_{ij}$  aus den Randbedingungen, also etwa aus einer bestimmten Anzahl von gegebenen Körpereaufmaßen zu ermitteln. Man wird daher auf ein Gleichungssystem für die  $a_{ij}$  geführt, das eine sehr hohe Anzahl von Unbekannten ( $i \cdot j$ ) enthalten muß, um die Schiffform auch im Bereich stärkerer Krümmungen (Kimm) durch eine ausreichende Zahl von Stützaufmaßen genügend wirklichkeitsnah erfassen zu können. Derartige Gleichungssysteme sind wegen der mit der Anzahl der Unbekannten rapide steigenden Genauigkeitsverluste praktisch nur unter besonderen Umständen lösbar.

Wegen dieser Schwierigkeiten, zu einer direkten räumlichen Entwicklung der Schiffsoberfläche zu gelangen, hat man sich auf den an zweidimensionalen Schiffslinien gewonnenen Erfahrungsschatz besonnen und versucht, das räumliche Problem auf zweidimensionale Entwicklungen zurückzuführen. Der einfachste Ansatz dieser Art

$$y = f(x) \cdot f(z) \tag{2.3}$$

führt zu einem Körper mit rechteckiger Mittschiffsebene, der durch affine Spanten und affine Wasserlinien gekennzeichnet ist, bei dem ferner die Spantarealkurve den Wasserlinien affin ist ( $\varphi = \alpha; \kappa = 1$ ) und der daher nur einen sehr beschränkten Formenvorrat bietet (Elementarschiff).

<sup>1</sup> Verfasser erhofft eine größere Übersichtlichkeit der Formelbeziehungen im Druckbild, wenn statt der im Schiffbau üblichen dimensionslosen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  hier  $x, y, z$  gebraucht werden.

Zur Beseitigung dieser Einschränkungen sind schon von Weinblum [18] einige Verallgemeinerungen angegeben worden. Um beispielsweise die Affinität und die sich daraus ergebenden Eigenschaften zu beseitigen, schlägt Weinblum die Form vor:

$$y = f(x) \cdot y_0(x, z), \quad (2.4)$$

wobei  $y_0(0, z) =$  Gleichung des Hauptspants.

Für den Zweck, einen Längsumriß des Schiffes von beliebig gegebenem Verlauf  $K(z)$ , d. h. mit im allgemeinen nicht vertikalen Steven zu erzeugen, findet man bei Weinblum den Ansatz:

$$y = f(x) \cdot \left[ 1 - f\left(\frac{x}{K(z)}\right) \right] \quad (2.5)$$

In neuerer Zeit ist von Kerwin [21] ein recht leistungsfähiges Verfahren für die Darstellung von Körpern mit rechteckiger Mittschiffsebene beschrieben worden, das von dem mit Gl. (2.2) und (2.3) verwandten Ansatz

$$y = \sum_i \sum_j a_{ij} \cdot \Psi_i(x) \cdot \Phi_j(z) \quad (2.6)$$

ausgeht, worin für die  $\Psi_i(x)$  und die  $\Phi_j(z)$  jeweils Familien orthogonaler Polynome (Kugelfunktionen) oder zumindest nahezu orthogonaler Polynome gewählt werden. Zur Bestimmung der Koeffizienten wird zunächst eine Anzahl von Stützspanten nach den Polynomen  $\Phi_j(z)$  entwickelt; dann faßt man die dabei ermittelten Koeffizienten als in  $x$ -Richtung variable Größen auf und entwickelt sie in den verschiedenen Wasserlinien ihrerseits nach den Polynomen  $\Psi_i(x)$ , woraus sich die  $a_{ij}$  ergeben. Die so gefundene Lösung läßt sich ohne weiteres in eine gewöhnliche, leicht zu verarbeitende Polynomschreibweise überführen [22]. — Diese Methode vereint zwei wichtige Vorteile: Erstens wird — analog Gl. (2.3) — von der Zerlegung der räumlichen Entwicklungsaufgabe bzw. des entsprechenden Gleichungssystems in mehrere kleinere, zweidimensionale Entwicklungssysteme Gebrauch gemacht. Zweitens lassen sich alle diese Gleichungssysteme im Gegensatz zu dem System nach Gl. (2.2) bequem auflösen, da infolge der Orthogonalitätseigenschaften der Entwicklungsfunktionen in der Koeffizientenmatrix die Hauptdiagonale stark überwiegt.

Mit ebenfalls sehr gutem Erfolg wird von Pien [23] ein für gegebenen Verlauf  $K(z)$  des Längsumrisses gültiger Ansatz benutzt, der Elemente aus den Gln. (2.2), (2.4) und (2.5) enthält:

$$y = [F(x, z) + \sum_i \sum_j a_{ij} x^i z^j] \left[ 1 - \left(\frac{x}{K(z)}\right)^2 \right]^{1/M}, \quad (2.7)$$

$$\text{worin } F(x, z) = \sum_i P_i(x) \cdot y_i(x_i, z) \quad (2.8)$$

In Gl. (2.7) ist  $\left[ 1 - \left(\frac{x}{K(z)}\right)^2 \right]^{1/M}$  der uns aus Gl. (2.5) bekannte Verzerrungsfaktor, der die nicht vertikale Stevenkontur erzeugt. Um den Einfluß der Verzerrung auf die Hecknähe zu beschränken, erscheint er hier in der Potenz  $1/M$ , wobei für  $M$  eine relativ groß gewählte ganze Zahl geeignet ist.

Die Funktion  $F(x, z)$  ist durch Verallgemeinerung von Gl. (2.4) entstanden. Während dort nur ein Stützspant  $y_0(x = \text{const}, z)$  vorgegeben werden kann, bietet Gl. (2.8) die Möglichkeit, eine beliebige Zahl von Stützspanten  $y_i(x_i = \text{const}, z)$  zu berücksichtigen. Die Funktion  $P_i(x)$  erhält damit den Charakter einer Interpolations- oder Einflußfunktion.

Weil auch bei einer größeren Zahl von Stützspanten eine gegebene Schiffsform  $f(x, z)$  durch den Ausdruck

$$g(x, z) = F(x, z) \cdot \left[ 1 - \left(\frac{x}{K(z)}\right)^2 \right]^{1/M} \quad (2.9)$$

nur bis auf einen gewissen Fehler  $e(x, z)$  zu approximieren sein wird, also

$$e(x, z) = f(x, z) - g(x, z), \quad (2.10)$$

ist schließlich eine Reihenentwicklung

$$e(x, z) = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i z^j \quad (2.11)$$

erforderlich, um die Schiffsform mit beliebig vorgegebener Genauigkeit zu erfassen. Da die Fehlerfläche  $e(x, z)$  nach den Erfahrungen von Pien nur noch geringe Krümmungen aufweist, läßt sich das aus Gl. (2.11) hervorgehende Gleichungssystem im Gegensatz zu dem gemäß Ansatz (2.2) ohne weiteres lösen.



## 2.2 Wahl einer problemgerechten Darstellungsmethode

Nach diesen Vorbemerkungen über einige in letzter Zeit erfolgreich entwickelte mathematische Schiffsdarstellungen können wir uns nun den Besonderheiten der hier vorliegenden Problemstellung zuwenden. Sie ist durch zwei in Konflikt tretende Forderungen gekennzeichnet. Einerseits soll ein möglichst flexibler Ansatz für die Gleichung der Schiffsoberfläche gewählt werden, der es gestattet, die als wesentlich angesehenen Parameter der Schiffsförmigkeit wie Schärfegrad  $\varphi$ , Völligkeitsgrad der Schwimmwasserlinie (KWL)  $\alpha$  und des Hauptspants  $\beta$ , die Verhältnisse der Hauptabmessungen  $L/B$  und  $B/T$ , den Spantcharakter sowie einige kennzeichnende Größen für den Verlauf von Spantarealkurve und Schwimmwasserlinie im schiffbaulich sinnvollen Bereich möglichst unabhängig voneinander systematisch zu variieren. Es ist zu erkennen, daß von den bisher erwähnten Ansätzen nur die nach Gl. (2.7) und mit der Einschränkung senkrechter Steven nach Gl. (2.6) alle diese Forderungen zu erfüllen gestatten. Andererseits kommen aber gerade diese umfangreichen und in bezug auf die Formparameter wenig übersichtlichen Formel-  
ausdrücke für den vorliegenden Zweck nicht in Betracht, denn bei der vieltausendfachen Bestimmung von Aufmaßen und Aufmaßableitungen im Rahmen der durchzuführenden Strömungs-  
berechnungen würden sie die Kapazität der hier zur Verfügung stehenden Rechenanlage Siemens 2002 des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung Berlin zu stark in Anspruch nehmen.

Da es sich im Zusammenhang mit den Strömungsberechnungen zunächst um grundsätzliche Untersuchungen an schiffsähnlichen Körpern handelt und die möglichst gute Übereinstimmung dieser Körper mit vorgegebenen Schiffsförmigkeiten von der Problemstellung her nicht gefordert wird, kann man ohne weiteres auf einige Eigenschaften der Darstellung nach Gl. (2.7) verzichten und den folgenden vereinfachten Ansatz wählen:

$$y(x, z) = F(x, z) = \sum_{i=1}^n P_i(x) \cdot y_i(x_i, z) \quad (2.12)$$

In Wegfall sind dabei die korrigierend und glättend wirkende Reihe  $e(x, z)$  sowie die den Stevenverlauf herstellende Verzerrungsfunktion gekommen. Aus dem Ansatz nach (2.12) gehen also schiffsähnliche Körper mit vertikalen Steven hervor, eine Vereinfachung, die im Rahmen grundsätzlicher Wechselwirkungsuntersuchungen als nicht einschneidend erscheint.

Aus Gl. (2.12) lassen sich unmittelbar ableiten:

1. Der Verlauf der Spantarealkurve  $A(x)$ :

$$A(x) = \int_0^1 \bar{y}(x, z) dz = \sum_i P_i(x) \cdot A_i \quad (2.13)$$

$$\text{mit } A_i = \int_0^1 y_i(x_i, z) dz = \text{Fläche des } i\text{'ten Stützspants} \quad (2.13a)$$

2. Der Schärfegrad  $\varphi$ :

$$\varphi = \int_{-1}^{+1} A(x) dx \quad (2.14)$$

3. Der Verlauf der Konstruktionswasserlinie ( $z = 0$ ):

$$y(x, 0) = \sum_i P_i(x) \cdot y_i(x_i, 0) \quad (2.15)$$

mit  $y_i(x_i, 0) = \text{KWL-Aufmaße an den Stützspanten}$

Durch den Ansatz gemäß Gl. (2.12) ist also, wie man erkennt, das räumliche Entwicklungsproblem auf die zweidimensionale Entwicklungsaufgabe für die vorzugebenden  $n$  Stützspanten  $y_i(x_i, z)$  und auf die Ermittlung der „Einflußfunktionen“  $P_i(x)$  zurückgeführt worden.

Ihrer Aufgabe gemäß, zwischen den Stützspanten zu interpolieren, muß eine jede Funktion  $P_i(x)$  am  $i$ -ten Stützspant zu Eins werden und an allen übrigen  $n - 1$  Stützspanten verschwinden. Es ergeben sich also für jedes  $i$

$$\text{eine Bedingung von der Form: } P_i(x_i) = 1 \quad (2.16)$$

$$\text{und } (n - 1) \text{ Bedingungen: } P_i(x_j) = 0 \text{ mit } j = 1, \dots, n; \quad (2.17)$$

$$j \neq i$$

Ferner wird meist verlangt, daß die Wasserlinien (Linien  $z = \text{const}$ ) am Hauptspant ( $x = 0$ ) parallel zur Längsrichtung einlaufen und am Heck ( $x = 1$ ) — bzw. am Bug ( $x = -1$ ) — verschwinden. Dies ist nur allgemein möglich, wenn für jedes  $i$ :

$$\frac{dP_i(0)}{dx} = 0 \quad (2.18)$$

und

$$P_i(1) = 0 \quad (2.19)$$

bzw.

$$P_i(-1) = 0$$

Mit diesen zwei zusätzlichen Bedingungen erhält man für jede der  $n$  Funktionen  $P_i(x)$  insgesamt  $(n + 2)$  Bestimmungsgleichungen, die von den übrigen  $(n - 1)$  Funktionen  $P_i(x)$  nicht abhängig sind, so daß für jede dieser Funktionen ein Ansatz mit  $(n + 2)$  freien Parametern zu wählen ist. Wählt man speziell einen Polynomansatz

$$P_i(x) = \sum_k a_{ik} x^k, \quad (2.20)$$

so muß man  $k = n + 2$  Glieder vorsehen.

Wie sich aus dem Vorhergehenden ferner ergibt, liefern die  $P_i(x)$  nun nicht nur das für den Verlauf der Wasserlinien maßgebliche Gesetz, sondern sie bestimmen gem. Gl. (2.13) in völlig entsprechender Weise auch den durch die Stützspantflächen  $A_i$  festgelegten Verlauf der Spantarealkurve. Innerhalb des durch den Faktor  $P_i(x)$  gegebenen Formenvorrats lassen sich die  $A_i$  noch frei bestimmen<sup>1</sup>. Man kann also z. B. einen dem Polynom (2.20) im Grade  $k$  entsprechenden Ansatz

$$A(x) = \sum_k c_k x^k \quad (2.21)$$

machen, wobei sich auch dem gewünschten Schärfegrad  $\varphi$  Rechnung tragen läßt.

Dann ergeben sich die  $c_k$  (oder umgekehrt bei gegebenen  $c_k$  die  $A_i$ ) durch Koeffizientenvergleich. Aus

$$A(x) = \sum_k c_k x^k = \sum_{i=1}^n P_i(x) \cdot A_i = \sum_{i=1}^n A_i \sum_k a_{ik} x^k \quad (2.22)$$

folgen  $k$  Gleichungen von der Form

$$c_k = \sum_{i=1}^n A_i a_{ik}. \quad (2.23)$$

Den Formenvorrat der Darstellung nach Gl. (2.12) kann man durch Erhöhung der Stützspantanzahl  $n$  erweitern. In anderen Fällen ist es aber vielleicht zweckmäßiger, bei fester Zahl  $n$  die Gliederzahl im Ansatz für  $P_i(x)$  und damit für  $A(x)$  über  $k = n + 2$  hinaus zu erhöhen und eine entsprechende Anzahl weiterer Randbedingungen einzuführen.

Die Konstruktionswasserlinie ist — anders als beim Elementarschiff gem. Gl. (2.3) — der Spantflächenkurve nicht affin, sondern durch die angenommenen Wasserlinienaufmaße an den Stützspanten gegeben. Die Erfahrung zeigt allerdings, daß man bei der Wahl von Polynomen relativ niedriger Ordnung für die  $P_i(x)$  mit der Form der KWL auf Kurvenverläufe beschränkt bleibt, die sich von der affinen Form nicht allzusehr unterscheiden, da größere Abweichungen mit Beulenbildung einhergehen. Dieser Mangel läßt sich jedoch ebenfalls durch eine höhere Gliederzahl im Ansatz beseitigen. Damit hat man im Prinzip auch bei der Formgebung der KWL und der Wahl ihrer Völligkeit die gewünschte Freiheit.

Im Rahmen der beim Schiffsentwurf gebotenen Möglichkeiten und unter Berücksichtigung der im Ansatz der Einflußfunktionen  $P_i(x)$  enthaltenen Einschränkungen in bezug auf den Formenvorrat lassen sich bei der Schiffsdarstellung nach Gl. (2.12) die folgenden Eigenschaften und Parameter der Schiffsförmung unabhängig voneinander wählen und systematisch variieren:

1. Die Spantflächenkurve  $A(x)$  und der Schärfegrad  $\varphi$ ;
2. der Konturverlauf der Stützspanten  $y_i(x_i, z)$  und der Hauptspantvölligkeitsgrad  $\beta$ ;
3. der Verlauf der Konstruktionswasserlinie  $y(x, 0)$  und der Wasserlinienvölligkeitsgrad  $\alpha$  in einem durch die Festlegungen zu 1. und 2. eingeschränkten Maße;
4. die Verhältnisse der Schiffshauptabmessungen  $L/B$  und  $B/T$ .

<sup>1</sup> Es darf übrigens nicht wundernehmen, daß sich neben den Stützspantaufmaßen  $y_i(x_i, z)$  hier auch die Stützspantflächen  $A_i$  frei wählen lassen, wie sich formal aus den Zusammenhängen (2.12) und (2.13) und den Eigenschaften der  $P_i(x)$  nach den Gln. (2.16) bis (2.19) ergibt. Dieser Freiheit sind durch die Bedingung (2.13 a), daß das Integral der Aufmaßfunktion über den Tiefgang gleich der Spantfläche sein muß, dieselben natürlichen Grenzen gezogen wie bei der entsprechenden Aufgabe des Schiffsentwurfs, einen Spant von gegebener Fläche zu zeichnen.

Damit gelangt man zur Beurteilung der Anwendungsmöglichkeiten für die hier beschriebene mathematische Schiffsdarstellung nach Gl. (2.12). Sie scheint besonders geeignet für systematische Untersuchungen der vorliegenden Art, bei denen es darauf ankommt, einen verhältnismäßig einfachen Ausdruck für die Schiffform zu benutzen und den Überblick über den Zusammenhang zwischen Formparameter und mathematischer Formel zu bewahren. Trotz der angedeuteten Verfeinerungsmöglichkeiten ist sie weniger geeignet für den Zweck, eine gegebene komplizierte Schiffform möglichst exakt zu erfassen. Hier wird der Aufwand von einer gewissen Grenze an lohnender verwertet, wenn man sich der in Abschn. 2.1 erwähnten, in Amerika erfolgreich erprobten Ansätze bedient.

Abschließend seien auch der Darstellung der Spanten einige Gedanken gewidmet. Hier entsteht ein besonderes Problem durch die auf die Strömungsberechnungen zugeschnittene Forderung, die Spanten sollen am Kiel mit waagerechter und in der Schwimmwasserlinie mit senkrechter Tangente enden. Diese Bedingungen entsprechen der Absicht, beim Übergang von Backbord nach Steuerbord und vom Unterwasserschiff zu seinem durch Spiegelung an der Schwimmebene erzeugten Widerpart einen knickfreien Übergang zu erzielen, der eine für die potentialtheoretischen Berechnungen zwar nicht unbedingt notwendige, aber doch für die erste Erprobung der Verfahren erwünschte Eigenschaft darstellt.

Nun ist bekannt, daß mit Hilfe von Elementarfunktionen oder deren Kombinationen ein senkrechter Einlauf des Spants gleichzeitig in der Mittschiffs- und in der Schwimmebene nicht zu erzielen ist. Daher kommen hier die bekannten Verfahren zur Spantdarstellung (wie etwa die besonders ausgefeilte, auf die Berücksichtigung zahlreicher Spantformkenngrößen zugeschnittene Methode von Thieme [24]) nicht in Frage, sondern es wird ein anderer, dem Schiffbauer an sich ebenfalls geläufiger Weg beschritten.

Während sich der Hauptspant am zweckmäßigsten aus den drei Abschnitten „Senkrechte Seitenwand“, „Kreisrunde Kimm“ und „Flacher Boden“ zusammenstückeln läßt, wird für die übrigen Spanten auf die konforme Abbildung mit Hilfe der Abbildungsfunktion von Lewis [25] zurückgegriffen.

Die aus der Theorie der hydrodynamischen Massen bekannten Lewis-Spanten, die mit Hilfe der Abbildungsfunktion

$$w = z + \frac{a}{z} + \frac{b}{z^3} \tag{2.24}$$

aus dem Kreis erzeugt werden, weisen die gewünschten Einläufe am Kiel und in der KWL auf. Da die Funktion nach Gl. (2.24) zwei freie Parameter enthält, lassen sich zwei Spanteigenschaften frei wählen; hier wird wie üblich das Seitenverhältnis  $b_0 : t_0$  und die Fläche  $F$  bzw. der Völligkeitsgrad  $\beta_{Sp}$  des betreffenden Halbspants vorgegeben (s. Abb. 3).

Wie in Anhang 9.1 ausführlicher hergeleitet, erhält man für den Lewis-Spant die vom Parameter  $\Theta$  abhängige Funktionsdarstellung:

$$\begin{aligned} y &= \frac{t_0}{0,5 B} \left[ \frac{(1-a) \sin \Theta - b \sin 3 \Theta}{1+a+b} \right] \\ z &= \frac{t_0}{T} \left[ \frac{(1+a) \cos \Theta + b \cos 3 \Theta}{1+a+b} \right] \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die Konstanten  $a$  und  $b$  bestimmen sich aus der Spantfläche und dem Seitenverhältnis gemäß

$$\begin{aligned} a &= \frac{(1-H)(1+b)}{1+H} \\ b &= H \left[ \frac{-(2C \cdot H - H + 1) + (H + 1) \sqrt{4C - 3}}{2(C \cdot H^2 - H^2 - H - 1)} \right], \end{aligned} \tag{2.26}$$

wobei  $H = \frac{b_0}{t_0} = \frac{\text{halbe Breite des gegebenen Spants}}{\text{Tiefe des gegebenen Spants}}$

und  $F = \frac{\pi}{4} t_0^2 \frac{1-a^2-3b^2}{(1+a+b)^2} = \text{gegebene Fläche des Halbspants,}$

woraus sich die Konstante  $C$  ermitteln läßt.

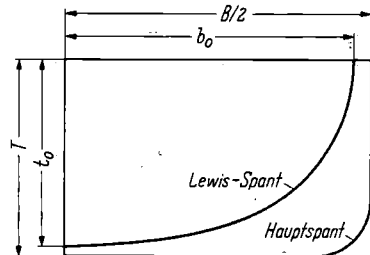


Abb. 3. Lewis-Spant.

Es sei beiläufig darauf hingewiesen, daß durch Verwendung von Abbildungsfunktionen mit mehr als zwei Parametern ein größerer Formenreichtum für die Spanten erzielt werden kann, so daß sich auf diesem Wege Schiffsspanten gegebener Form mit beliebiger — nur durch den Aufwand praktisch eingeschränkter — Genauigkeit approximieren lassen.

### 2.3 Beispiel

Das Verfahren der Schiffsdarstellung nach Gl. (2.12) kann vorteilhaft an Hand des Beispiels erläutert werden, das auch den im vorliegenden Zusammenhang durchgeführten potentialtheoretischen Strömungs- und Sogberechnungen zugrunde liegt; um den Ergebnissen dieser ersten Beispielrechnung bereits einen möglichst großen Aussagewert zu verleihen, wird eine verhältnismäßig völlige Schiffsspannenform gewählt, da hierbei besonders ausgeprägte Effekte der Verdrängungsströmung in Hecknähe und sehr deutliche Zähigkeitseinflüsse bei den später beabsichtigten Vergleichsversuchen zu erwarten sind. Ferner wird zur Vereinfachung eine zur Hauptspantebene ( $x = 0$ ) symmetrische Schiffsspannenform angenommen.

Die Spantflächenkurve wird aus diesen Überlegungen heraus mit  $A(x) = 1 - x^4$  angesetzt, was einem Schärfegrad  $\varphi = 0,8$  entspricht.

Es werden  $n = 3$  Stützspanten, und zwar an den Stellen  $x_1 = 0$  (Hauptspant),  $x_2 = 0,5$  und  $x_3 = 0,9$  angenommen. Dann ergeben sich die Interpolationspolynome  $P_i(x)$  aus dem Ansatz (2.20) mit der Gliederzahl  $k = n + 2 = 5$  und den Randbedingungen (2.16) bis (2.19) zu (vgl. auch [23]):

$$P_1(x) = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + a_{14}x^4 = 1 - 11,568x^2 + 19,7037x^3 - 9,1358x^4 \quad (2.27)$$

$$P_2(x) = a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 + a_{24}x^4 = +18x^2 - 38x^3 + 20x^4 \quad (2.28)$$

$$P_3(x) = a_{30} + a_{31}x + a_{32}x^2 + a_{33}x^3 + a_{34}x^4 = -15,432x^2 + 46,296x^3 - 30,864x^4 \quad (2.29)$$

Die mit der Hauptspantfläche normierten Flächen der Stützspanten erhält man aus  $A(x) = 1 - x^4$ :

$$A_1 = 1; \quad A_2 = 0,9375; \quad A_3 = 0,3439.$$

Führt man diese Größen in die Gleichung der Spantarealkurve (2.13) ein:

$$A(x) = A_1 \cdot P_1(x) + A_2 \cdot P_2(x) + A_3 \cdot P_3(x), \quad (2.30)$$

so kann man durch Koeffizientenvergleich gem. Gl. (2.22) die Einhaltung des gegebenen Kurvenverlaufs  $A(x)$  bestätigen:

$$A(x) = \sum_{k=0}^4 c_k x^k = 1 - x^4, \quad (2.31)$$

weil

$$\begin{aligned} c_0 &= A_1 a_{10} + A_2 a_{20} + A_3 a_{30} = 1 \\ c_1 &= A_1 a_{11} + A_2 a_{21} + A_3 a_{31} = 0 \\ c_2 &= A_1 a_{12} + A_2 a_{22} + A_3 a_{32} = 0 \\ c_3 &= A_1 a_{13} + A_2 a_{23} + A_3 a_{33} = 0 \\ c_4 &= A_1 a_{14} + A_2 a_{24} + A_3 a_{34} = 1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Der Konturverlauf der Stützspanten wird folgendermaßen festgelegt:

Der Hauptspant ( $x_1 = 0$ ) besteht aus einem geraden Teil und einer kreisrunden Kimm, die in den flachen Boden übergeht. Aus der Annahme der Völligkeit  $\beta = 0,99$  ergibt sich

$$\text{für } z \leq 0,807: y_1 = 1 \quad (2.33)$$

$$\text{und für } z > 0,807: y_1 = 0,807 + 0,8 \cdot \sqrt{0,482(1 - z_1) - (1 - z_1)^2}$$

Die übrigen Spanten sind Lewis-Spanten, deren Verlauf sich nach den in Anhang 9.1 näher erläuterten Zusammenhängen ermitteln läßt. Für den Spant  $x_2 = 0,5$  erhält man aus  $A_2 = 0,9375$ ,  $t_0/T = 1$ ,  $b_0/0,5 B = 0,984$  und  $B/T = 2,5$ :

$$\begin{aligned} H &= 1,23 \\ \beta_{Spt} &= 0,943216 \\ a &= -0,092753 \\ b &= -0,1007 \\ y_2 &= 0,991882 [1,092753 \sin \Theta + 0,1007 \sin 3 \Theta] \\ z_2 &= 1,239853 [0,907247 \cos \Theta - 0,1007 \cos 3 \Theta] \end{aligned} \quad (2.34)$$

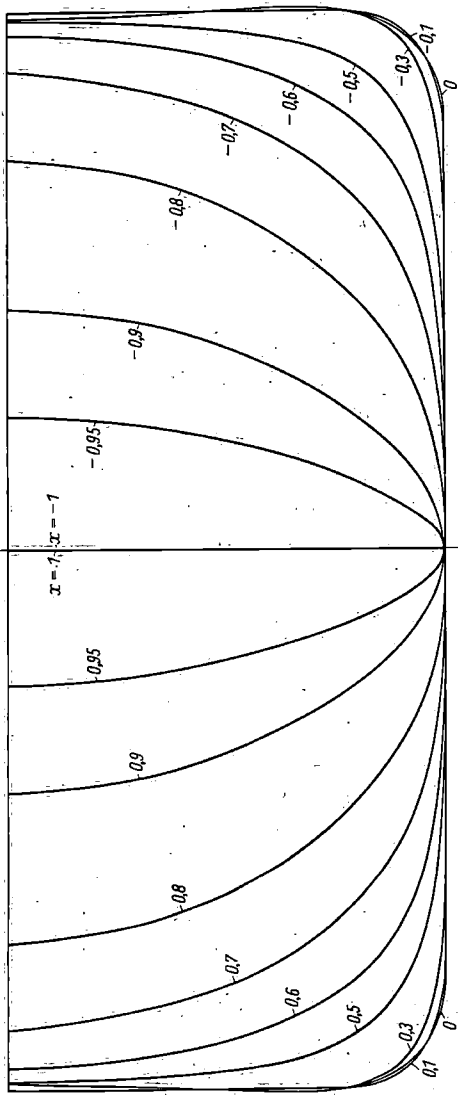


Abb. 4. Spantrieb.

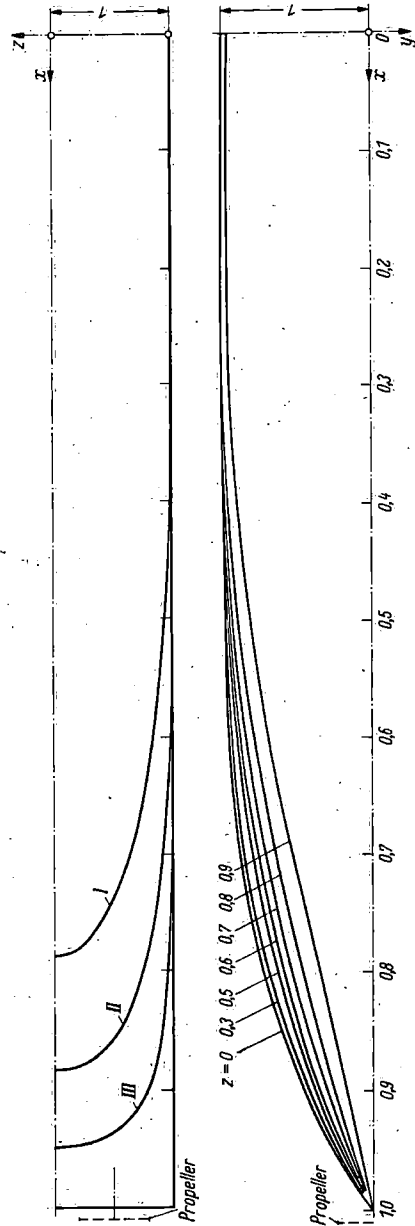
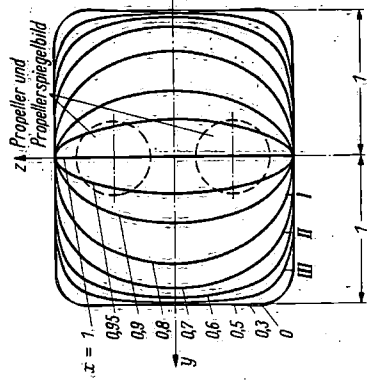


Abb. 5. Spantrieb und Hinterschiffslinienriß des Doppelkörpers.

Entsprechend gilt für den Spant  $x_3 = 0,9$  wegen  $A_3 = 0,3439$ ,  $t_0/T = 1$ ,  $b_0/0,5 B = 0,448$  und  $B/T = 2,5$ :

$$\begin{aligned} H &= 0,56 \\ \beta_{Spt} &= 0,759958 \\ a &= 0,286254 \\ b &= 0,0149 \\ y_3 &= 0,614839 [0,713746 \sin \Theta - 0,0149 \sin 3 \Theta] \\ z_3 &= 0,768549 [1,286254 \cos \Theta + 0,0149 \cos 3 \Theta] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Bei der Formgebung der Spanten wurde durch die Wahl des Seitenverhältnisses  $H$  gleichzeitig der Verlauf der Konstruktionswasserlinie in der gewünschten Weise festgelegt. Als Gleichung der KWL ergibt sich:

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= y_1(z=0) \cdot P_1(x) + y_2(z=0) \cdot P_2(x) + y_3(z=0) \cdot P_3(x) = \\ &= 1 \cdot P_1(x) + 0,984 \cdot P_2(x) + 0,448 \cdot P_3(x) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Die Verhältnisse der Schiffshauptabmessungen werden innerhalb des für normale Schiffformen in Frage kommenden Bereichs mit  $L/B = 8$  und  $B/T = 2,5$  gewählt. Damit gelangt man schließlich zu dem in den Abb. 4 und 5 dargestellten schiffsähnlichen Körper. Die in Hauptspantnähe zu erkennenden kleinen Beulen sind bei der für die  $P_i(x)$  gewählten geringen Zahl von Polynomgliedern nicht ganz zu vermeiden, bleiben jedoch für die Wechselwirkungsuntersuchungen völlig ohne Bedeutung.

### 3. Berechnung der Potentialströmung um einen gegebenen schiffsähnlichen Körper

#### 3.1 Analytische Formulierung der Aufgabe

Aus den hydrodynamischen Grundgleichungen läßt sich bekanntlich herleiten, daß sich das einer stationären räumlichen Strömung zugeordnete Geschwindigkeitsfeld  $v(X, Y, Z)$  in einer idealen, wirbelfreien Flüssigkeit durch den Differentiationsprozeß

$$\begin{aligned} v(X, Y, Z) &= \{v_x(X, Y, Z); v_y(X, Y, Z); v_z(X, Y, Z)\} = \\ &= \text{grad } \Phi(X, Y, Z) = \left\{ \frac{\partial \Phi(X, Y, Z)}{\partial X}; \frac{\partial \Phi(X, Y, Z)}{\partial Y}; \frac{\partial \Phi(X, Y, Z)}{\partial Z} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

aus einer Potentialfunktion  $\Phi(X, Y, Z)$  berechnen läßt, wobei diese die Potentialgleichung im Raume (Laplacesche Differentialgleichung) befriedigen muß:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 0. \quad (3.2)$$

Lösungen dieser Differentialgleichung, die im Unendlichen verschwinden und deren Ableitungen gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllen [28], nennt man harmonische Funktionen.

Offenbar genügt nun allen diesen Anforderungen die Funktion (s. a. Abb. 6):

$$\Phi = \frac{1}{r} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2}}, \quad (3.3)$$

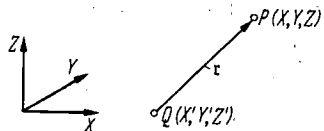


Abb. 6. Lageskizze mit Quellpunkt und Aufpunkt.

wobei  $\mathbf{r}$  der von einem Quellpunkt  $Q(X', Y', Z')$  zu einem Aufpunkt  $P(X, Y, Z)$  gerichtete Vektor ist. Insbesondere ist:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi_{XX} + \Phi_{YY} + \Phi_{ZZ} = 0, \\ \text{da } \Phi_{XX} &= -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(X-X')^2}{r^5} \\ \Phi_{YY} &= -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(Y-Y')^2}{r^5} \\ \Phi_{ZZ} &= -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(Z-Z')^2}{r^5} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aus dem Typ der Differentialgleichung (3.2) läßt sich eine der wesentlichsten Eigenschaften ihrer Lösungen herleiten, das Superpositionsprinzip, nach dem die Summe zweier harmonischer Funktionen wiederum eine harmonische Funktion darstellt. Daher sind selbstverständlich auch alle Vielfachen von  $\Phi = 1/r$  harmonische Funktionen.

Hieraus leitet sich die Berechtigung ab, sogenannte Singularitäten zu definieren, deren Potentiale vom Typ  $1/r$  sind, und aus solchen Singularitäten Strömungsfelder aufzubauen.

Beispielsweise ist das für den Aufpunkt  $P$  berechnete Potential einer im Quellpunkt  $Q$  angebrachten Einzelquelle

$$\Phi(P) = -\frac{E}{4\pi r} \quad (3.5)$$

mit  $E$  = Quellergiebigkeit in  $m^3/s$

eine harmonische Funktion. Die zugeordnete, radial, d. h. vom Quellpunkt zum Aufpunkt gerichtete Geschwindigkeit folgt entsprechend

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{E}{4\pi r^2} \quad (3.6)$$

einem quadratischen Abstandsgesetz.

Zu Verallgemeinerungen des Begriffs der Einzelquelle gelangt man, wenn man die Gesamtergiebigkeit längs einer Linie, über eine Fläche oder innerhalb eines Volumens kontinuierlich verteilt. Im folgenden Zusammenhang sind besonders flächenhafte Quellbelegungen von Bedeutung, für die man die auf die Flächeneinheit bezogene Ergiebigkeit  $\varepsilon$  (Dimension  $m/s$ ) definiert. Da das einem Flächenelement  $dO$  der Belegungsschicht an der Stelle  $Q$  zugeordnete Potential im Aufpunkt  $P$ :

$$d\Phi(P) = -\frac{\varepsilon(Q)dO}{4\pi r} \quad (3.7)$$

ebenfalls ohne weiteres harmonisch ist, muß auch die der Gesamtfläche  $O$  entsprechende, integrierte Funktion

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_O \frac{\varepsilon(Q)dO}{r} \quad (3.8)$$

diesen Charakter haben. Das einer flächenhaften Singularitätenverteilung entsprechende Potential vom Typ (3.8) liefert also durchweg für die Beschreibung von Potentialströmungen zulässige Funktionen.

Nun lautet die Aufgabe hier, die Umströmung eines gegebenen Körpers zu berechnen, d. h. diejenige Quellbelegung der Körperoberfläche zu suchen, die bewirkt, daß in einem gegebenen Störgeschwindigkeitsfeld  $w_0(X, Y, Z)$  die resultierenden (auf den Betrag  $w_0$  der Störgeschwindigkeit in großer Entfernung bezogenen) Geschwindigkeiten normal zur Körperoberfläche in allen ihren Punkten verschwinden:

$$\Sigma \frac{w_N}{w_0}(X, Y, Z) = 0 \quad (3.9)$$

Zur resultierenden Normalgeschwindigkeit trägt neben der Transportströmung (Normalkomponente  $w_{0N}$ ) die von der Körperquellbelegung herrührende Normalkomponente im Aufpunkt bei, die aus zwei Summanden besteht:

$$\begin{aligned} \frac{w_{\varepsilon N}}{w_0} &= -\frac{1}{4\pi} \iint_O \varepsilon(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dO + \frac{\varepsilon(P)}{2} = \\ &= +\frac{1}{4\pi} \iint_O \varepsilon(Q) \frac{1}{r^2} \cdot n_0(P) \cdot \frac{r}{|r|} dO + \frac{\varepsilon(P)}{2}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei  $n_0(P)$  den äußeren Normaleinheitsvektor im Aufpunkt bezeichnet.

Der Integralausdruck entspricht der durch Wirkung aller Quellelemente im Aufpunkt  $P$  auf der Körperoberfläche, also in der Belegungsschicht herrschenden Normalgeschwindigkeit. Wie sich zeigen läßt [26 bis 28], tritt bei Flächenbelegungen beim Durchgang durch die Belegungsschicht ein Sprung der Normalableitungen des Potentials auf dergestalt, daß im Außenfeld bei infinitesimaler Annäherung an die Belegungsschicht eine um  $\varepsilon/2$  höhere Geschwindigkeit herrscht als in der Schicht selbst. Daher muß außerdem der zweite Term in (3.10) berücksichtigt werden.

Für die numerischen Berechnungen erweist es sich als vorteilhaft, das Doppelintegral über die Körperoberfläche in (3.10) unter Benutzung der in (2.1) definierten dimensionslosen Koordinaten durch die Transformation

$$\begin{aligned} dO &= \sqrt{1 + \left(\frac{B}{L}\right)^2 y_x^2(Q) + \left(\frac{B}{2T}\right)^2 y_z^2(Q)} \cdot \frac{L \cdot T}{2} dF_Q \\ \text{mit } d\bar{F}_Q &= dx' dz' \end{aligned} \quad (3.11)$$

in ein Integral in kartesischen Koordinaten umzuformen, wobei — um alle Punkte der Körperoberfläche zu erfassen — die Mittschiffsebene als Integrationsbereich zweimal, nämlich jeweils für die rechts und links von ihr liegenden Punkte der Oberfläche zu durchlaufen ist. Symbolisiert man diesen Integrationsbereich  $F_Q$  kurz durch die Grenzen  $-1$  bis  $+1$  in Richtung beider Integrationsvariablen, so geht aus Gl. (3.9) insgesamt folgende Bestimmungsgleichung für die Quellbelegung  $\varepsilon$  hervor:

$$\sum \frac{w_N}{w_0} = 0 = \frac{w_{0N}(P)}{w_0} + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon(Q)}{r^3(P, Q)} \cdot n_0(P) \cdot r(P, Q) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{B}{L}\right)^2 y_x^2(Q) + \left(\frac{B}{2T}\right)^2 y_z^2(Q)} \cdot \frac{L \cdot T}{2} dx' dz' + \frac{\varepsilon(P)}{2} \quad (3.12)$$

Diese Gleichung läßt sich in die übersichtliche Form:

$$\varepsilon(P) + \int_{F_Q} \varepsilon(Q) \cdot K(P, Q) \cdot dF_Q = g(P) \quad (3.13)$$

bringen, wenn man die folgenden Abkürzungen einführt:

$$K(P, Q) = \frac{2 \cdot \frac{2T}{L} \cdot n_0(P) \cdot \frac{r(P, Q)}{L/2}}{4\pi \cdot \left(\frac{r(P, Q)}{L/2}\right)^3} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{B}{L}\right)^2 y_x^2(Q) + \left(\frac{B}{2T}\right)^2 y_z^2(Q)} = \text{Kernfunktion} \quad (3.14)$$

$$g(P) = -\frac{2w_{0N}(P)}{w_0} = -\frac{2w_0(P)}{w_0} \cdot n_0(P) = \text{Störfunktion} \quad (3.15)$$

$$n_0(P) = \mp \frac{\left\{ \frac{B}{L} y_x(P); -1; \frac{B}{2T} y_z(P) \right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{L}\right)^2 y_x^2(P) + \left(\frac{B}{2T}\right)^2 y_z^2(P)}} = \text{äußerer Normaleinheitsvektor}, \quad (3.16)$$

Minuszeichen für  $y > 0$ , Pluszeichen für  $y < 0$

$$\frac{r(P, Q)}{L/2} = \left\{ x - x'; \frac{B}{L} (y - y'); \frac{2T}{L} (z - z') \right\}; \quad r = |r| \quad (3.17)$$

In axialer Anströmung  $w_0/w_0 = \{1; 0; 0\}$  erhält man für die Störfunktion insbesondere:

$$g(P) = + \frac{2 \frac{B}{L} \cdot y_x(P)}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{L}\right)^2 y_x^2(P) + \left(\frac{B}{2T}\right)^2 y_z^2(P)}} \quad (\text{für } y > 0) \quad (3.15a)$$

Das Problem, die Gl. (3.13), eine sogenannte Integralgleichung 2. Art für  $\varepsilon$ , zu lösen, bei der das Verschwinden der Normalableitung eines Schichtbelegungspotentials auf der gegebenen Belegungsfläche gefordert wird, wird als 2. Randwertaufgabe (auch Neumannsche Randwertaufgabe) der Potentialtheorie bezeichnet. Es hat eine reiche mathematische Literatur hervorgebracht, und den Bemühungen vieler namhafter Mathematiker ist der Beweis zu verdanken, daß diese Aufgabe für Körper, die überall eine eindeutig definierte Tangentialebene besitzen oder andere entsprechende Glattheitskriterien<sup>1</sup> erfüllen, stets eine eindeutig bestimmte Lösung hat [26], [29].

Durch diesen Nachweis tritt die Eignung der Oberflächen-Quellbelegungen für die Lösung von Randwertaufgaben der vorliegenden Art klar zutage. Man möchte die Beziehung zwischen Flächenbelegung und Randwertaufgabe „natürlich“ nennen, und es wird der grundsätzliche Unterschied gegenüber denjenigen Verfahren deutlich, die mit Singularitätenverteilungen im Körperinneren arbeiten und die Körperumströmung durch den Kunstgriff erzeugen, die entstehenden Grenzstromflächen als Körperoberfläche zu deuten. Bei diesen Methoden kann der allgemeine Nachweis der Existenz von Lösungen bei beliebig gegebener Körperform nicht geführt werden.

### 3.2 Lösungsverfahren

Die Frage nach einem geeigneten Näherungsverfahren zur Lösung der Integralgleichung (3.13) für den allgemeinen räumlichen Fall stellte sich praktisch erst in der jüngsten Vergangenheit, als

<sup>1</sup> Beim Fehlen dieser Voraussetzungen stößt der Existenzbeweis auf große Schwierigkeiten. Von Pöde [34] wurde jedoch am Beispiel der zweidimensionalen 2. Randwertaufgabe gezeigt, daß auch bei Anwendungen mit wesentlich geringeren Glattheitseigenschaften noch eindeutig bestimmte Lösungen vorliegen können.



die erforderlichen umfangreichen Berechnungen mit Hilfe von Rechenautomaten durchführbar wurden. Daher lagen dem Verfasser zu Beginn seiner Untersuchungen (1959) für diesen Fall keinerlei in der Literatur niedergelegte Erfahrungen über numerische Lösungsmethoden vor<sup>1</sup>. Allerdings hatten die Arbeiten von Riegels [30] und Dreger [9] für den verwandten rotations-symmetrischen Fall die Eignung eines bestimmten Iterationsverfahrens erwiesen, und der Verfasser hatte im Rahmen von Forschungsarbeiten von Amtsberg [7] Gelegenheit, sich einen Überblick über die Eigenschaften dieses Verfahrens zu verschaffen. Er brachte daher in einer 1960 veröffentlichten Studie [31] die Meinung zum Ausdruck, das Iterationsverfahren sei auch für das räumliche Problem gut geeignet<sup>2</sup>.

Für dieses Verfahren wird die Integralgleichung (3.13) in die nachstehende, im räumlichen wie im rotations-symmetrischen Fall maßgebliche Iterationsfassung gebracht:

$$\varepsilon_{n+1}(P) = g(P) - \iint_{F_Q} \varepsilon_n(Q) \cdot K(P, Q) dF_Q \quad (3.18)$$

Aus einer Näherung für die Quellverteilung  $\varepsilon_n(Q)$  wird also durch Integration über die Fläche  $F_Q$  eine verbesserte Näherung in den Aufpunkten  $P$  berechnet. Dies kann selbstverständlich nur für endlich viele Aufpunkte geschehen. Im nächsten Schritt werden die neu ermittelten Belegungen durch Interpolation zu einem Kontinuum ergänzt und als Quellpunkte erneut in die Iterationsgleichung eingeführt.

Da bekannt ist [31], daß die Abweichungen der aufeinanderfolgenden Näherungen vom endgültigen Lösungswert im allgemeinen alternierendes Vorzeichen aufweisen, kann die Konvergenz dadurch wesentlich verbessert werden, daß man mit dem Mittelwert zwischen zwei solchen Näherungen weiterrechnet:

$$\varepsilon_{n+2}(P) = \frac{\varepsilon_{n+1}(P) + \varepsilon_n(P)}{2}; \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} \text{ wie oben.} \quad (3.19)$$

Praktisch folgt dann immer eine Mittelwertbildung auf einen Integrations-schritt.

Als Ausgangsnäherung  $\varepsilon_0$  wählt man zweckmäßig [7]:

$$\varepsilon_0(P) = \frac{1}{2} g(P) \quad (3.20)$$

Dies wäre die streng richtige Lösung, wenn in Gl. (3.13) der Integralausdruck ebenfalls gleich  $g(P)/2$  wäre, was nach bisherigen Erfahrungen eine meist recht gut zutreffende Ausgangsannahme darstellt.

Von besonderer Bedeutung für die Auswertung der Doppelintegrale ist die Tatsache, daß die Kernfunktion bei Zusammenrücken von Aufpunkt und Quellpunkt ( $Q \rightarrow P$ ;  $r \rightarrow 0$ ) singulär wird. Zwar kann man beweisen, daß die Kerne integrierbar sind [33], d. h. daß der Wert des Doppelintegrals beschränkt bleibt, jedoch macht die Berechnung des Beitrags der Umgebung des singulären Punktes einige Schwierigkeiten.

Es besteht zunächst die Möglichkeit, bei der Integration ein den singulären Punkt  $P = Q$  umgebendes, kleines Rechteck im Integrationsbereich auszunehmen und das Integral im Innern durch Reihenentwicklung der Funktion in den beiden Koordinatenrichtungen näherungsweise zu bestimmen. Die Umgebung des Aufpunkts

$$\begin{aligned} x - x_0 &\leq x \leq x + x_0 \\ z - z_0 &\leq z \leq z + z_0 \end{aligned}$$

liefert zu dem in der Integralgleichung (3.13) auftretenden Doppelintegral, das aus den Integralen in (3.10) bzw. (3.12) durch Multiplikation mit Zwei hervorgegangen ist, den Beitrag:

$$2 \frac{\Delta w \varepsilon_N(P)}{w_0} = 2 \int_{z-z_0}^{z+z_0} \int_{x-x_0}^{x+x_0} \varepsilon_n(Q) \cdot K(P, Q) \cdot dx' dz' \quad (3.21)$$

<sup>1</sup> Inzwischen sind durch eine Arbeit von Hess und Smith [32] aus dem Jahre 1962 die Ergebnisse einer langjährigen Entwicklung der Douglas Aircraft Co. bekannt geworden, die ein andersartiges Lösungsverfahren mit ebenfalls sehr gutem Erfolg benutzt haben, auf das in Anhang 9.2 noch vergleichend eingegangen werden soll.

<sup>2</sup> Die Konvergenz eines solchen Iterationsverfahrens kann im Prinzip gefährdet sein, wenn der Iterationsprozeß in die Nähe von Eigenfunktionen der Integralgleichung führt. Diese Möglichkeit des Versagens der Iteration, die grundsätzlich noch genauer zu untersuchen wäre, kommt aber — wie die bisherigen Erfahrungen und Überlegungen gezeigt haben — offenbar im vorliegenden Fall der Umströmung einer einfach geschlossenen Körperoberfläche nicht in Betracht.

Die vom Verfasser durchgeführte Auswertung von Gl. (3.21) bestätigt den beschränkten Charakter des Integrals, ist jedoch für praktische numerische Berechnungen zu umständlich, so daß von einer Wiedergabe des Resultats hier abgesehen wird.

Wegen dieser numerischen Schwierigkeiten wird im folgenden ein anderer Weg eingeschlagen. Bei der Bestimmung des Doppelintegrals von Gl. (3.13) werden zunächst die inneren Einfachintegrale

$$E(z') = \int_{-1}^{+1} \varepsilon(Q) \cdot K(P, Q) dx' \quad (3.22)$$

ausgewertet, wobei, um alle Quellpunkte der Körperbelegung zu erfassen, der Integrationsbereich in der Mittschiffsebene ( $-1 \leq x' \leq +1$ ) einmal für die rechts von dieser Ebene liegende Schicht ( $y > 0$ ; Steuerbord) und einmal für die links davon liegenden Punkte ( $y < 0$ ; Backbord) zu durchlaufen ist. Diese Integrale bleiben beschränkt, solange nicht  $z' = z$ . Bei der anschließenden Berechnung des äußeren Integrals über die  $E(z')$  muß daher ein schmaler Streifen  $\Delta z'$ , der die Singularität enthält, ausgespart werden (Abb. 7). Den Beitrag dieses Streifens kann man näherungsweise aus den Funktionswerten am Streifenrand als Trapezfläche berechnen, wobei der Gipfel der Singularität abgeschnitten und vernachlässigt wird. Der in der Vernachlässigung des Gipfels enthaltene Fehler läßt sich durch Auswertung der Integrale (3.21) abschätzen. Praktisch kann man bequemer und mit gewissem Recht die Trapezfläche als Maß für den Beitrag des vernachlässigten Flächenteils ansehen. Dann ergibt sich die zulässige Breite des Streifens durch Probieren aus der Bedingung, daß der Anteil des Trapezes am gesamten Doppelintegral eine sehr niedrig gewählte Grenze (hier etwa 1%) an keinem Aufpunkt überschreiten soll, im vorliegenden Beispielfall zu  $\Delta z' = 0,002$ .

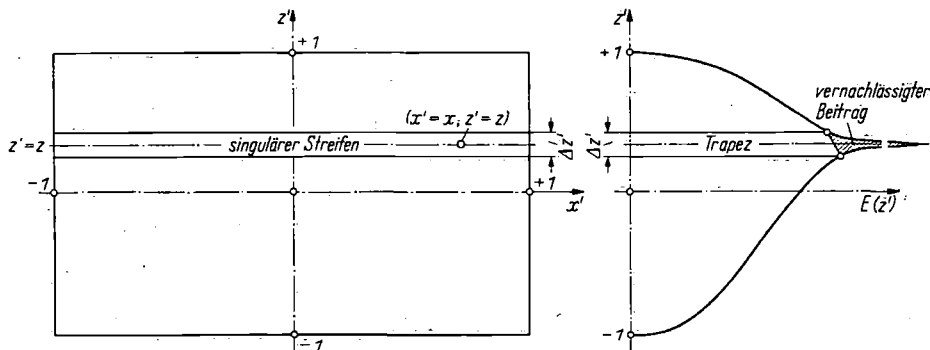


Abb. 7. Integrationsgrundbereich und Behandlung des singulären Streifens.

### 3.3 Beispiel für die Lösung der Integralgleichung der reinen Körperumströmung

Der im Beispiel untersuchte Doppelkörper nach Abb. 5 besitzt eine Reihe spezieller Symmetrieeigenschaften. Neben der üblichen Backbord-Steuerbord-Symmetrie und der Formgleichheit von Vor- und Hinterschiff ist durch die Spiegelung des Unterwasserschiffs an der Schwimmbene ferner Übereinstimmung zwischen Ober- und Unterteil des Doppelkörpers herbeigeführt worden.

Dadurch können die Berechnungen auf im positiven Oktanten ( $0 \leq x \leq 1$ ;  $0 \leq y \leq 1$ ;  $0 \leq z \leq 1$ ) angeordnete Aufpunkte beschränkt bleiben. Es werden also entsprechend einem äquidistanten Raster mit  $\Delta x = 0,125$  und  $\Delta z = 0,125$  insgesamt 64 Aufpunkte untersucht, wobei die Linien  $x = 0$  (Hauptspant) und  $z = 1$  (Kiel) außer Betracht bleiben können, da dort die Lösung bei Anströmung in Richtung der Körperlängsachse verschwindet, weil die Strömung tangential zur Körperoberfläche verläuft<sup>1</sup>.

Die am Heck infolge der spitz auslaufenden Wasserlinien auftretende scharfe Kante wird durch die Hilfsannahme einer Abrundung von sehr kleinem, aber nicht unendlich kleinem Radius beseitigt, um der Forderung nach Stetigkeit der Tangentialebene zu genügen. Bei den numerischen

<sup>1</sup> Während die Belegung am Hauptspant unter den genannten Voraussetzungen exakt verschwindet, gilt dies für den Kiel nur dann mit zulässiger Näherung, wenn ferner der Schiffsboden — wie im vorliegenden Beispiel — in der Umgebung des Kiels genügend flach verläuft. Siehe hierzu die ergänzenden Bemerkungen des Verfassers in der Diskussion zu seinem Vortrag (Jahrb. STG, 57. Bd., 1963).

Berechnungen muß man dann, um zu dem richtigen Grenzwert der Quellbelegung bei Annäherung an das Heck zu gelangen, den Normalvektor des Körpers nach den vor Eintritt in die Abrundung vorliegenden Verhältnissen berechnen (s. Abb. 8).

Die Tab. 1 bis 3 geben einen Überblick über den Ablauf des Iterationsprozesses. Von der Ausgangsnäherung bis zur letzten Näherung, die von der vorletzten durchweg nur noch geringfügig abwich, waren 8 Iterationsdoppelschritte (Integration und Mittelwertbildung) erforderlich. Dabei sind diejenigen Punkte, die der Forderung nicht mehr als einprozentiger Abweichung schon während des Iterationsprozesses genügten, nicht weiter iteriert worden.

Der ganze Konvergenzprozeß ist durch ein sehr gleichmäßiges Fortschreiten gekennzeichnet. Die größten Schwankungen treten in der Nähe des Hecks auf, wie gemäß der dort stark gekrümmten Körperform auch zu erwarten war. Doch konvergiert der Prozeß auch hier gegen einen stabilen Endwert. Im Bereich niedriger Absolutwerte der Belegung treten prozentual gesehen ebenfalls größere Schwankungen auf, da eine geringe Belegungsänderung in der Nachbarschaft auf diese Punkte relativ stark einwirkt. Jedoch lassen sich im Prinzip auch diese Änderungen herausiterieren, abgesehen davon, daß sie nach ihrem Betrag völlig unbedeutend sind.

Dem überwiegenden Anschein nach hat auch bei dem Vorgehen in Doppelschritten die Abweichung vom Iterationsendwert in zwei aufeinanderfolgenden Doppelschrittnäherungen alternierendes Vorzeichen. Jedoch bleibt diese Regel in anderen Beispielen nicht völlig ohne Ausnahmen. Immerhin dürfte eine weitere Mittelwertbildung die Konvergenz grundsätzlich noch verbessern.

Für die Verbesserung der Konvergenz des Verfahrens kommen im Prinzip auch noch folgende Maßnahmen in Frage:

1. Die „Iteration in Einzelschritten“, bei der die für einen Aufpunkt gewonnene Lösung unmittelbar in das Quellpunktkontinuum eingeführt wird und so bereits die Berechnung für den folgenden Aufpunkt beeinflusst.
2. In Verbindung mit Maßnahme 1. Iteration der Aufpunkte in der Reihenfolge der jeweils größten Abweichung zwischen zwei Näherungen.
3. In Abwandlung von 1. und 2. das Vorwegiterieren wichtiger Teilbereiche (z. B. des Heckbereichs) unter Festhaltung des übrigen Bereichs, um die größten Störungen vorweg auszugleichen.

Diese Maßnahmen zur Konvergenzbeschleunigung sind im Rahmen anderer Beispiele bereits stichprobenweise untersucht worden und sind bisher durchweg günstig, jedoch noch nicht abschließend zu beurteilen.

Schließlich sind einige Bemerkungen über die numerische Auswertung der inneren Einfachintegrale für  $z' = \text{const}$  am Platze. Im Prinzip werden derartige Integrationen vom Rechenautomaten meist nach der Simpsonschen Regel vorgenommen, wobei die Intervallanzahl automatisch so lange verdoppelt wird, bis der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Simpson-Näherungsflächen ein gegebenes Maß nicht mehr überschreitet. Nun bleibt der Integrand des Einfachintegrals wegen  $z \neq z'$  zwar durchweg beschränkt, erreicht jedoch in der Nähe des Aufpunktes sehr hohe Spitzenwerte und fällt von diesen außerordentlich steil zur Seite hin ab. Es wäre daher nicht durchführbar oder zumindest unzuweckmäßig, die geringe Intervallbreite, die im Bereich des Funktionsgipfels notwendig ist, im Zuge der automatischen Intervallhalbierung auch in flachen Funktionsbereichen zur Anwendung zu bringen. Daher mußte ein besonderer Programmteil entwickelt werden, der die Steilheit der Funktion in der Nähe des Maximums untersucht und dementsprechend eine zweckmäßige Vorunterteilung der Funktion in eine Anzahl von steileren und weniger steilen Bereichen vornimmt. Durch diese Maßnahme ist der Unterteilungsaufwand bei der Simpsonintegration an die geeigneten Stellen dirigiert und damit bei gegebener Gesamtgenauigkeit wesentlich herabgesetzt worden.

Der Fehler der Quellbelegung im Iterationsendergebnis läßt sich angesichts der komplizierten Fehlerfortpflanzung natürlich nicht direkt angeben. Gewöhnlich nimmt man mit gewissem Recht

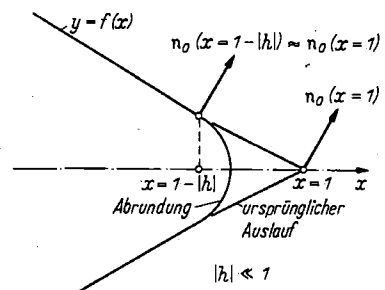


Abb. 8. Behandlung des spitzen Auslaufs am Heck.

Tabelle 1

Näherungslösungen  $\varepsilon_i(x, z)$  für die Quellbelegung des Körpers in axialer Translationsströmung ( $\varepsilon_0$  bis  $\varepsilon_2$ )

$M)$ $N)$	$\varepsilon_i$	8)	8)	8)	8)
1*		1*	1*	1*	1*
1*F (0,125; 0)		1*-9.366557800 <sub>10-03</sub>	1*-1.293550598 <sub>10-03</sub>	1*-1.471957040 <sub>10-03</sub>	
2*F (0,250; 0)		2*-2.199122595 <sub>10-03</sub>	2*-1.468015650 <sub>10-04</sub>	2*+1.018246111 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0)		3*+2.267365296 <sub>10-03</sub>	3*+1.032778356 <sub>10-03</sub>	3*+1.499074408 <sub>10-03</sub>	
4*F (0,500; 0)		4*-1.520186415 <sub>10-03</sub>	4*-8.133139925 <sub>10-03</sub>	4*-3.298217598 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0)		5*-7.364770715 <sub>10-03</sub>	5*-8.013146441 <sub>10-03</sub>	5*-8.045787720 <sub>10-03</sub>	
6*F (0,750; 0)		6*-1.894107468 <sub>10-01</sub>	5*-2.266237254 <sub>10-01</sub>	6*-2.394479512 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0)		7*-3.646405424 <sub>10-01</sub>	7*-4.525007459 <sub>10-01</sub>	7*-4.923592647 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0)		8*-5.674708600 <sub>10-01</sub>	8*-1.573628480 <sub>10-01</sub>	8*-3.806030488 <sub>10-01</sub>	
2*		2*	2*	2*	
1*F (0,125; 0,125)		1*-8.524344830 <sub>10-03</sub>	1*-1.166234818 <sub>10-03</sub>	1*-1.323743182 <sub>10-03</sub>	
2*F (0,250; 0,125)		2*-1.917201727 <sub>10-03</sub>	2*+2.856227525 <sub>10-04</sub>	2*+1.523274875 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0,125)		3*+1.318037189 <sub>10-03</sub>	3*+8.974116890 <sub>10-03</sub>	3*+1.337841864 <sub>10-03</sub>	
4*F (0,500; 0,125)		4*-1.731702320 <sub>10-03</sub>	4*-1.124601939 <sub>10-03</sub>	4*-6.895760135 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0,125)		5*-7.597553985 <sub>10-03</sub>	5*-8.355448675 <sub>10-03</sub>	5*-8.439984705 <sub>10-03</sub>	
6*F (0,750; 0,125)		6*-1.897120926 <sub>10-01</sub>	6*-2.271819027 <sub>10-01</sub>	6*-2.401347751 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0,125)		7*-3.614047374 <sub>10-01</sub>	7*-4.477051840 <sub>10-01</sub>	7*-4.869680303 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0,125)		8*-5.627141820 <sub>10-01</sub>	8*-1.568713280 <sub>10-01</sub>	8*-3.716327348 <sub>10-01</sub>	
3*		3*	3*	3*	
1*F (0,125; 0,250)		1*-6.070745430 <sub>10-03</sub>	1*-7.953707055 <sub>10-03</sub>	1*-8.905678090 <sub>10-03</sub>	
2*F (0,250; 0,250)		2*-1.158393568 <sub>10-03</sub>	2*+1.456211949 <sub>10-03</sub>	2*+2.889793621 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0,250)		3*-1.587307620 <sub>10-03</sub>	3*+4.706101665 <sub>10-03</sub>	3*+8.440162715 <sub>10-03</sub>	
4*F (0,500; 0,250)		4*-2.366515056 <sub>10-03</sub>	4*-2.052580760 <sub>10-03</sub>	4*-1.758145619 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0,250)		5*-8.281264330 <sub>10-03</sub>	5*-9.352908585 <sub>10-03</sub>	5*-9.584157090 <sub>10-03</sub>	
6*F (0,750; 0,250)		6*-1.904337013 <sub>10-01</sub>	6*-2.284326277 <sub>10-01</sub>	6*-2.416365420 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0,250)		7*-3.517005146 <sub>10-01</sub>	7*-4.332496531 <sub>10-01</sub>	7*-4.704953594 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0,250)		8*-5.480799735 <sub>10-01</sub>	8*-1.680481928 <sub>10-01</sub>	8*-3.626624207 <sub>10-01</sub>	
4*		4*	4*	4*	
1*F (0,125; 0,375)		1*-2.246029421 <sub>10-03</sub>	1*-2.173574203 <sub>10-03</sub>	1*-2.156821546 <sub>10-03</sub>	
2*F (0,250; 0,375)		2*-2.114282700 <sub>10-03</sub>	2*+2.946011990 <sub>10-03</sub>	2*+4.632590408 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0,375)		3*-6.650346335 <sub>10-03</sub>	3*-2.676846768 <sub>10-03</sub>	3*-1.018331240 <sub>10-04</sub>	
4*F (0,500; 0,375)		4*-3.425000922 <sub>10-03</sub>	4*-3.588364706 <sub>10-03</sub>	4*-3.522040948 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0,375)		5*-9.364855240 <sub>10-03</sub>	5*-1.091978153 <sub>10-01</sub>	5*-1.137965374 <sub>10-01</sub>	
6*F (0,750; 0,375)		6*-1.909467642 <sub>10-01</sub>	6*-2.292427330 <sub>10-01</sub>	6*-2.427001029 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0,375)		7*-3.354328540 <sub>10-01</sub>	7*-4.085726021 <sub>10-01</sub>	7*-4.426588353 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0,375)		8*-5.224084775 <sub>10-01</sub>	8*-2.331352578 <sub>10-01</sub>	8*-3.313952731 <sub>10-01</sub>	
5*		5*	5*	5*	
1*F (0,125; 0,500)		1*+2.458559921 <sub>10-03</sub>	1*+4.929287710 <sub>10-03</sub>	1*+6.118624490 <sub>01-03</sub>	
2*F (0,250; 0,500)		2*+3.227664793 <sub>10-04</sub>	2*+3.884858629 <sub>10-03</sub>	2*+5.726755355 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0,500)		3*-1.432226367 <sub>10-03</sub>	3*-1.368903594 <sub>10-03</sub>	3*-1.273620098 <sub>10-03</sub>	
4*F (0,500; 0,500)		4*-4.902039240 <sub>10-03</sub>	4*-5.697891155 <sub>10-03</sub>	4*-5.928481205 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0,500)		5*-1.072961776 <sub>10-01</sub>	5*-1.285286067 <sub>10-01</sub>	5*-1.357265474 <sub>10-01</sub>	
6*F (0,750; 0,500)		6*-1.898660747 <sub>10-01</sub>	6*-2.271998051 <sub>10-01</sub>	6*-2.401854170 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0,500)		7*-3.120717577 <sub>10-01</sub>	7*-3.722920101 <sub>10-01</sub>	7*-4.008413463 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0,500)		8*-4.835113748 <sub>10-01</sub>	8*-1.969490887 <sub>10-01</sub>	8*-3.216560799 <sub>10-01</sub>	
6*		6*	6*	6*	
1*F (0,125; 0,625)		1*+7.058297230 <sub>10-03</sub>	1*+1.185226303 <sub>10-03</sub>	1*+1.413278241 <sub>10-03</sub>	
2*F (0,250; 0,625)		2*-7.880203055 <sub>10-04</sub>	2*+2.518779208 <sub>10-03</sub>	2*+4.145501815 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0,625)		3*-2.552776630 <sub>10-03</sub>	3*-2.942194149 <sub>10-03</sub>	3*-3.064502150 <sub>10-03</sub>	
4*F (0,500; 0,625)		4*-6.745655300 <sub>10-03</sub>	4*-8.260372195 <sub>10-03</sub>	4*-8.818467950 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0,625)		5*-1.208626092 <sub>10-01</sub>	5*-1.468393174 <sub>10-01</sub>	5*-1.562638021 <sub>10-01</sub>	
6*F (0,750; 0,625)		6*-1.842228913 <sub>10-01</sub>	6*-2.177615049 <sub>10-01</sub>	6*-2.288955898 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0,625)		7*-2.799338908 <sub>10-01</sub>	7*-3.220354892 <sub>10-01</sub>	7*-3.429622949 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0,625)		8*-4.276407131 <sub>10-01</sub>	8*-2.160399736 <sub>10-01</sub>	8*-3.057688769 <sub>10-01</sub>	

Erläuterung: Es werden nach dem in der ersten Spalte erklärten Schema Funktionswerte  $\varepsilon_i(x, z) = F(x, z)$  für alle Aufpunkte des Iterationsrasters angegeben, der aus  $M = 8$  Wasserlinien und  $N = 8$  Spanten besteht. Die Zahlendarstellung ist halblogarithmisch, d. h. der Stellenwert ergibt sich durch Multiplikation der Mantisse mit der Zehnerpotenz, die der auf die tiefgesetzte 10 folgende Exponent angibt.

Tabelle 1 (Fortsetzung)

<p>7*</p> <p>1*F (0,125; 0,750)</p> <p>2*F (0,250; 0,750)</p> <p>3*F (0,375; 0,750)</p> <p>4*F (0,500; 0,750)</p> <p>5*F (0,625; 0,750)</p> <p>6*F (0,750; 0,750)</p> <p>7*F (0,875; 0,750)</p> <p>8*F (1,000; 0,750)</p>	<p>7*</p> <p>1*+9.271068985<sub>10-03</sub></p> <p>2*-6.425103070<sub>10-03</sub></p> <p>3*-4.173529581<sub>10-03</sub></p> <p>4*-8.584043355<sub>10-01</sub></p> <p>5*-1.262804189<sub>10-01</sub></p> <p>6*-1.671662514<sub>10-01</sub></p> <p>7*-2.344095982<sub>10-01</sub></p> <p>8*-3.482012202<sub>10-01</sub></p>	<p>7*</p> <p>1*+1.508584400<sub>10-03</sub></p> <p>2*-4.832506400<sub>10-03</sub></p> <p>3*-5.088300310<sub>10-03</sub></p> <p>4*-1.062415744<sub>10-01</sub></p> <p>5*-1.515284003<sub>10-01</sub></p> <p>6*-1.895323272<sub>10-01</sub></p> <p>7*-2.486340157<sub>10-01</sub></p> <p>8*-4.539020240<sub>10-03</sub></p>	<p>7*</p> <p>1*+1.749217802<sub>10-03</sub></p> <p>2*-4.386472819<sub>10-03</sub></p> <p>3*-5.455216300<sub>10-03</sub></p> <p>4*-1.138629998<sub>10-01</sub></p> <p>5*-1.598427440<sub>10-01</sub></p> <p>6*-1.950254900<sub>10-01</sub></p> <p>7*-2.575556797<sub>10-01</sub></p> <p>8*-2.549131567<sub>10-01</sub></p>
<p>8*</p> <p>1*F (0,125; 0,875)</p> <p>2*F (0,250; 0,875)</p> <p>3*F (0,375; 0,875)</p> <p>4*F (0,500; 0,875)</p> <p>5*F (0,625; 0,875)</p> <p>6*F (0,750; 0,875)</p> <p>7*F (0,875; 0,875)</p> <p>8*F (1,000; 0,875)</p>	<p>8*</p> <p>1*+6.763111490<sub>10-03</sub></p> <p>2*-1.477215838<sub>10-03</sub></p> <p>3*-4.861171055<sub>10-03</sub></p> <p>4*-7.923040850<sub>10-03</sub></p> <p>5*-1.022917483<sub>10-01</sub></p> <p>6*-1.244607857<sub>10-01</sub></p> <p>7*-1.633823641<sub>10-01</sub></p> <p>8*-2.299262521<sub>10-01</sub></p>	<p>8*</p> <p>1*+1.136553526<sub>10-03</sub></p> <p>2*-1.603258508<sub>10-03</sub></p> <p>3*-5.794462260<sub>10-03</sub></p> <p>4*-9.244530040<sub>10-03</sub></p> <p>5*-1.122129628<sub>10-01</sub></p> <p>6*-1.215253289<sub>10-01</sub></p> <p>7*-1.320266505<sub>10-01</sub></p> <p>8*-1.490017746<sub>10-01</sub></p>	<p>8*</p> <p>1*+1.267215053<sub>10-03</sub></p> <p>2*-1.741087016<sub>10-03</sub></p> <p>3*-6.152141455<sub>10-03</sub></p> <p>4*-9.596314565<sub>10-03</sub></p> <p>5*-1.124237405<sub>10-01</sub></p> <p>6*-1.143810585<sub>10-01</sub></p> <p>7*-1.206528028<sub>10-01</sub></p> <p>8*-1.822173940<sub>10-01</sub></p>

Tabelle 2

Näherungslösungen  $\epsilon_i(x, z)$  für die Quellbelegung des Körpers in axialer Translationsströmung ( $\epsilon_3$  bis  $\epsilon_5$ )

M) N)	$\epsilon_i$	8) 8)	$\epsilon_3$	8) 8)	$\epsilon_4$	8) 8)	$\epsilon_5$
1*		1*		1*		1*	
1*F (0,125; 0)		1*-1.557724609 <sub>10-03</sub>		1*-1.603509719 <sub>10-03</sub>		1*-1.626061106 <sub>10-03</sub>	
2*F (0,250; 0)		2*+1.762373028 <sub>10-03</sub>		2*+2.083697125 <sub>10-03</sub>		2*+2.268463354 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0)		3*+1.766644647 <sub>10-03</sub>		3*+1.894414649 <sub>10-03</sub>		3*+1.963050001 <sub>10-03</sub>	
4*F (0,500; 0)		4*-1.115340790 <sub>10-03</sub>		4*+1.325448836 <sub>10-03</sub>		4*+2.142567458 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0)		5*-8.045787720 <sub>10-03</sub>		5*-8.045787720 <sub>10-03</sub>		5*-8.045787720 <sub>10-03</sub>	
6*F (0,750; 0)		6*-2.420113693 <sub>10-01</sub>		6*-2.439007756 <sub>10-01</sub>		6*-2.439007756 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0)		7*-5.023285350 <sub>10-01</sub>		7*-5.095252470 <sub>10-01</sub>		7*-5.111749975 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0)		8*-2.475271559 <sub>10-01</sub>		8*-3.204588331 <sub>10-01</sub>		8*-2.802169380 <sub>10-01</sub>	
2*		2*		2*		2*	
1*F (0,125; 0,125)		1*-1.399026782 <sub>10-03</sub>		1*-1.439681265 <sub>10-03</sub>		1*-1.459657962 <sub>10-03</sub>	
2*F (0,250; 0,125)		2*+2.303006315 <sub>10-03</sub>		2*+2.642936564 <sub>10-03</sub>		2*+2.837243438 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0,125)		3*+1.594613099 <sub>10-03</sub>		3*+1.717289251 <sub>10-03</sub>		3*+1.783322096 <sub>10-03</sub>	
4*F (0,500; 0,125)		4*-3.952564588 <sub>10-03</sub>		4*-2.634007269 <sub>10-03</sub>		4*-1.876155835 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0,125)		5*-8.315360550 <sub>10-03</sub>		5*-8.281208040 <sub>10-03</sub>		5*-8.281208040 <sub>10-03</sub>	
6*F (0,750; 0,125)		6*-2.427824314 <sub>10-01</sub>		6*-2.447091505 <sub>10-01</sub>		6*-2.447091505 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0,125)		7*-4.966300464 <sub>10-01</sub>		7*-5.037257235 <sub>10-01</sub>		7*-5.052949560 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0,125)		8*-2.501463788 <sub>10-01</sub>		8*-3.159395049 <sub>10-01</sub>		8*-2.794775027 <sub>10-01</sub>	
3*		3*		3*		3*	
1*F (0,125; 0,250)		1*-9.346287560 <sub>10-03</sub>		1*-9.597812665 <sub>10-03</sub>		1*-9.719739225 <sub>10-03</sub>	
2*F (0,250; 0,250)		2*+3.765970988 <sub>10-03</sub>		2*+4.153935222 <sub>10-03</sub>		2*+4.371730920 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0,250)		3*+1.066845996 <sub>10-03</sub>		3*+1.172943089 <sub>10-03</sub>		3*+1.230458239 <sub>10-03</sub>	
4*F (0,500; 0,250)		4*-1.534571244 <sub>10-03</sub>		4*-1.437174573 <sub>10-03</sub>		4*-1.379175953 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0,250)		5*-9.534208325 <sub>10-03</sub>		5*-9.534208325 <sub>10-03</sub>		5*-9.534208325 <sub>10-03</sub>	
6*F (0,750; 0,250)		6*-2.444580471 <sub>10-01</sub>		6*-2.464627115 <sub>10-01</sub>		6*-2.464627115 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0,250)		7*-4.792101340 <sub>10-01</sub>		7*-4.859058860 <sub>10-01</sub>		7*-4.872932339 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0,250)		8*-2.527656016 <sub>10-01</sub>		8*-3.114203790 <sub>10-01</sub>		8*-2.787380673 <sub>10-01</sub>	
4*		4*		4*		4*	
1*F (0,125; 0,375)		1*-2.156821546 <sub>10-03</sub>		1*-2.156821546 <sub>10-03</sub>		1*-2.156821546 <sub>10-03</sub>	
2*F (0,250; 0,375)		2*+5.636006795 <sub>10-03</sub>		2*+6.087398960 <sub>10-03</sub>		2*+6.337714090 <sub>10-03</sub>	
3*F (0,375; 0,375)		3*+1.550469728 <sub>10-03</sub>		3*+2.323523714 <sub>10-03</sub>		3*+2.756239762 <sub>10-03</sub>	
4*F (0,500; 0,375)		4*-3.411375150 <sub>10-03</sub>		4*-3.369328855 <sub>10-03</sub>		4*-3.338959951 <sub>10-03</sub>	
5*F (0,625; 0,375)		5*-1.144308540 <sub>10-01</sub>		5*-1.144308540 <sub>10-01</sub>		5*-1.144308540 <sub>10-01</sub>	
6*F (0,750; 0,375)		6*-2.456582358 <sub>10-01</sub>		6*-2.477540943 <sub>10-01</sub>		6*-2.477540943 <sub>10-01</sub>	
7*F (0,875; 0,375)		7*-4.495656864 <sub>10-01</sub>		7*-4.556397475 <sub>10-01</sub>		7*-4.566025372 <sub>10-01</sub>	
8*F (1,000; 0,375)		8*-2.599758976 <sub>10-01</sub>		8*-3.013439190 <sub>10-01</sub>		8*-2.770650599 <sub>10-01</sub>	

Erläuterung: Es werden nach dem in der ersten Spalte erklärten Schema Funktionswerte  $\epsilon_i(x, z) = F(x, z)$  für alle Aufpunkte des Iterationsrasters angegeben, der aus  $M = 8$  Wasserlinien und  $N = 8$  Spanten besteht. Die Zahlendarstellung ist halblogarithmisch, d. h. der Stellenwert ergibt sich durch Multiplikation der Mantisse mit der Zehnerpotenz, die der auf die tiefgesetzte 10 folgende Exponent angibt.

Tabelle 2 (Fortsetzung)

<p>5*</p> <p>1*F (0,125; 0,500)</p> <p>2*F (0,250; 0,500)</p> <p>3*F (0,375; 0,500)</p> <p>4*F (0,500; 0,500)</p> <p>5*F (0,625; 0,500)</p> <p>6*F (0,750; 0,500)</p> <p>7*F (0,875; 0,500)</p> <p>8*F (1,000; 0,500)</p>	<p>5*</p> <p>1*+6.752131000<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+6.808055700<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*-1.188851265<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-5.963502105<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.376389145<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.429055970<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.047648456<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.597691906<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>5*</p> <p>1*+7.031050280<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+7.296691720<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*-1.150730121<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-5.963502105<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.388094149<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.449038595<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.047648456<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.913419389<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>5*</p> <p>1*+7.176661980<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+7.566957020<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*-1.127171855<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-5.963502105<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.388094149<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.449038595<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.047648456<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.737579865<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>
<p>6*</p> <p>1*F (0,125; 0,625)</p> <p>2*F (0,250; 0,625)</p> <p>3*F (0,375; 0,625)</p> <p>4*F (0,500; 0,625)</p> <p>5*F (0,625; 0,625)</p> <p>6*F (0,750; 0,625)</p> <p>7*F (0,875; 0,625)</p> <p>8*F (1,000; 0,625)</p>	<p>6*</p> <p>1*+1.530374729<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*+5.120531260<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-3.085428202<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.010816195<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.591874688<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.306543310<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-3.427456312<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.561851126<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>6*</p> <p>1*+1.584348200<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*+5.553490320<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-3.085428202<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.116878570<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.608098316<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.306543310<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-3.427456312<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.827292218<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>6*</p> <p>1*+1.611985437<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*+5.797684060<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-3.085428202<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.161167915<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.613847891<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.306543310<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-3.427456312<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.674183703<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>
<p>7*</p> <p>1*F (0,125; 0,750)</p> <p>2*F (0,250; 0,750)</p> <p>3*F (0,375; 0,750)</p> <p>4*F (0,500; 0,750)</p> <p>5*F (0,625; 0,750)</p> <p>6*F (0,750; 0,750)</p> <p>7*F (0,875; 0,750)</p> <p>8*F (1,000; 0,750)</p>	<p>7*</p> <p>1*+1.865970745<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-3.980684574<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-5.588845560<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-1.166726259<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>5*-1.621203428<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.938104128<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-2.506485097<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.139932582<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>7*</p> <p>1*+1.916919934<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-3.829955448<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-5.657906615<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-1.181590538<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>5*-1.634098494<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.938104128<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-2.511405008<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.071606149<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>7*</p> <p>1*+1.942416069<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-3.717714570<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-5.686824955<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-1.188204413<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>5*-1.634098494<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.938104128<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-2.511405008<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.462987765<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>
<p>8*</p> <p>1*F (0,125; 0,875)</p> <p>2*F (0,250; 0,875)</p> <p>3*F (0,375; 0,875)</p> <p>4*F (0,500; 0,875)</p> <p>5*F (0,625; 0,875)</p> <p>6*F (0,750; 0,875)</p> <p>7*F (0,875; 0,875)</p> <p>8*F (1,000; 0,875)</p>	<p>8*</p> <p>1*+1.312232504<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-1.806814358<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-6.282723240<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.660408645<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.124237405<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.065140635<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-1.023047121<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.634764268<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>8*</p> <p>1*+1.318678661<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-1.855392684<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-6.356891845<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.660408645<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.124237405<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.033137788<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-9.705746985<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.748849092<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>8*</p> <p>1*+1.318678661<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-1.881093048<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-6.393265725<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.660408645<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.124237405<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.013349112<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-9.273754730<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.680912921<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>

Tabelle 3

Näherungslösungen  $\varepsilon_i(x, z)$  für die Quellbelegung des Körpers in axialer Translationsströmung ( $\varepsilon_0$  bis  $\varepsilon_8$ )

M)	$\varepsilon_i$	8)	$\varepsilon_6$	8)	$\varepsilon_7$	8)	$\varepsilon_8$
N)		8)		8)		8)	
1*		1*		1*		1*	
1*F (0,125; 0 )	)	1*-1.638130370 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	1*-1.638130370 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	1*-1.638130370 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
2*F (0,250; 0 )	)	2*+2.345080445 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	2*+2.854653305 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	2*+3.094800628 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
3*F (0,375; 0 )	)	3*+1.995180142 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	3*+2.042634787 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	3*+2.064287574 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
4*F (0,500; 0 )	)	4*+2.490149874 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	4*+2.944987027 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	4*+3.139911284 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
5*F (0,625; 0 )	)	5*-8.045787720 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	5*-8.045787720 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	5*-8.045787720 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
6*F (0,750; 0 )	)	6*-2.439007756 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	6*-2.439007756 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	6*-2.439007756 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)
7*F (0,875; 0 )	)	7*-5.111749975 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	7*-5.111749975 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	7*-5.111749975 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)
8*F (1,000; 0 )	)	8*-2.978537714 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	8*-2.904065671 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	8*-2.951428637 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)
2*		2*		2*		2*	
1*F (0,125; 0,125)	)	1*-1.470473446 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	1*-1.470473446 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	1*-1.470473446 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
2*F (0,250; 0,125)	)	2*+2.918600736 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	2*+3.428841189 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	2*+3.668933707 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
3*F (0,375; 0,125)	)	3*+1.814180165 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	3*+1.861466790 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	3*+1.883016138 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
4*F (0,500; 0,125)	)	4*-1.558206268 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	4*-1.109127524 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	4*-9.174160520 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
5*F (0,625; 0,125)	)	5*-8.281208040 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	5*-8.281208040 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)	5*-8.281208040 <sub>10<sup>-02</sup></sub>	)
6*F (0,750; 0,125)	)	6*-2.447091505 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	6*-2.447091505 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	6*-2.447091505 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)
7*F (0,875; 0,125)	)	7*-5.052949560 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	7*-5.052949560 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	7*-5.052949560 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)
8*F (1,000; 0,125)	)	8*-2.965030208 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	8*-2.885407393 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)	8*-2.932726416 <sub>10<sup>-01</sup></sub>	)

Erläuterung: Es werden nach dem in der ersten Spalte erklärten Schema Funktionswerte  $\varepsilon_i(x, z) = F(x, z)$  für alle Aufpunkte des Iterationsrasters angegeben, der aus  $M = 8$  Wasserlinien und  $N = 8$  Spanten besteht. Die Zahlendarstellung ist halblogarithmisch, d. h. der Stellenwert ergibt sich durch Multiplikation der Mantisse mit der Zehnerpotenz, die der auf die tiefgesetzte 10 folgende Exponent angibt.

Tabelle 3 (Fortsetzung)

<p>3*</p> <p>1*F (0,125; 0,250)</p> <p>2*F (0,250; 0,250)</p> <p>3*F (0,375; 0,250)</p> <p>4*F (0,500; 0,250)</p> <p>5*F (0,625; 0,250)</p> <p>6*F (0,750; 0,250)</p> <p>7*F (0,875; 0,250)</p> <p>8*F (1,000; 0,250)</p>	<p>3*</p> <p>1*-9.788770000<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+4.466391270<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*+1.257444897<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>4*-1.355493033<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>5*-9.534208325<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>6*-2.464627115<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.872932339<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.951522702<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>3*</p> <p>1*-9.788770000<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+4.975709781<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*+1.303012070<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-1.314157131<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-9.534208325<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>6*-2.464627115<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.872932339<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.866749118<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>3*</p> <p>1*-9.788770000<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+5.214371750<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*+1.323644367<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>4*-1.296721633<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>5*-9.534208325<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>6*-2.464627115<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.872932339<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.914024198<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>
<p>4*</p> <p>1*F (0,125; 0,375)</p> <p>2*F (0,250; 0,375)</p> <p>3*F (0,375; 0,375)</p> <p>4*F (0,500; 0,375)</p> <p>5*F (0,625; 0,375)</p> <p>6*F (0,750; 0,375)</p> <p>7*F (0,875; 0,375)</p> <p>8*F (1,000; 0,375)</p>	<p>4*</p> <p>1*-2.156821546<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+6.447551640<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*+2.951476816<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>4*-3.338959951<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>5*-1.144308540<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.477540943<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.566025372<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.902108950<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>4*</p> <p>1*-2.156821546<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+6.958221425<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*+3.389431318<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>4*-3.338959951<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>5*-1.144308540<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.477540943<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.566025372<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.828710231<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>4*</p> <p>1*-2.156821546<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+7.195620325<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*+3.585018704<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>4*-3.338959951<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>5*-1.144308540<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.477540943<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.566025372<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.869285934<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>
<p>5*</p> <p>1*F (0,125; 0,500)</p> <p>2*F (0,250; 0,500)</p> <p>3*F (0,375; 0,500)</p> <p>4*F (0,500; 0,500)</p> <p>5*F (0,625; 0,500)</p> <p>6*F (0,750; 0,500)</p> <p>7*F (0,875; 0,500)</p> <p>8*F (1,000; 0,500)</p>	<p>5*</p> <p>1*+7.239585705<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+7.686272305<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*-1.117220577<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-5.963502105<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.388094149<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.449038595<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.047648456<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.833337025<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>5*</p> <p>1*+7.239585705<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+8.198357135<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*-1.117220577<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-5.963502105<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.388094149<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.449038595<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.047648456<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.777379169<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>5*</p> <p>1*+7.239585707<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>2*+8.432952270<sub>10<sup>-03</sup></sub></p> <p>3*-1.117220577<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-5.963502105<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.388094149<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.449038595<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-4.047648456<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.809633371<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>
<p>6*</p> <p>1*F (0,125; 0,625)</p> <p>2*F (0,250; 0,625)</p> <p>3*F (0,375; 0,625)</p> <p>4*F (0,500; 0,625)</p> <p>5*F (0,625; 0,625)</p> <p>6*F (0,750; 0,625)</p> <p>7*F (0,875; 0,625)</p> <p>8*F (1,000; 0,625)</p>	<p>6*</p> <p>1*+1.624748308<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*+5.905204235<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-3.085428202<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.161167915<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.613847891<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.306543310<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-3.427456312<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.764913333<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>6*</p> <p>1*+1.624748308<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*+6.421141408<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-3.085428202<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.161167915<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.613847891<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.306543310<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-3.427456312<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.706908347<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>6*</p> <p>1*+1.624748308<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*+6.650994955<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-3.085428202<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.161167915<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.613847891<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-2.306543310<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-3.427456312<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-2.740850136<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>
<p>7*</p> <p>1*F (0,125; 0,750)</p> <p>2*F (0,250; 0,750)</p> <p>3*F (0,375; 0,750)</p> <p>4*F (0,500; 0,750)</p> <p>5*F (0,625; 0,750)</p> <p>6*F (0,750; 0,750)</p> <p>7*F (0,875; 0,750)</p> <p>8*F (1,000; 0,750)</p>	<p>7*</p> <p>1*+1.953837477<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-3.672277065<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-5.686824955<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-1.188204413<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>5*-1.634098494<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.938104128<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-2.511405008<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.856222734<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>7*</p> <p>1*+1.953837477<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-3.136400898<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-5.686824955<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-1.188204413<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>5*-1.634098494<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.938104128<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-2.511405008<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.601266783<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>7*</p> <p>1*+1.953837477<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-2.912104819<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-5.686824955<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-1.188204413<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>5*-1.634098494<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.938104128<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-2.511405008<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.765360298<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>
<p>8*</p> <p>1*F (0,125; 0,875)</p> <p>2*F (0,250; 0,875)</p> <p>3*F (0,375; 0,875)</p> <p>4*F (0,500; 0,875)</p> <p>5*F (0,625; 0,875)</p> <p>6*F (0,750; 0,875)</p> <p>7*F (0,875; 0,875)</p> <p>8*F (1,000; 0,875)</p>	<p>8*</p> <p>1*+1.318678661<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*+1.897576393<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-6.393265725<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.660408645<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.124237405<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.006907636<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-9.197411055<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.726508470<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>8*</p> <p>1*+1.318678661<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-1.897576393<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-6.393265725<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.660408645<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.124237405<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.006907636<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-9.197411055<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.696274376<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>	<p>8*</p> <p>1*+1.318678661<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>2*-1.897576393<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>3*-6.393265725<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>4*-9.660408645<sub>10<sup>-02</sup></sub></p> <p>5*-1.124237405<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>6*-1.006907636<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>7*-9.197411055<sub>10<sup>-01</sup></sub></p> <p>8*-1.714937788<sub>10<sup>-01</sup></sub></p>

Erläuterung: Es werden nach dem in der ersten Spalte erklärten Schema Funktionswerte  $\varepsilon_i(x, z) = F(x, z)$  für alle Aufpunkte des Iterationsrasters angegeben, der aus  $M = 8$  Wasserlinien und  $N = 8$  Spanten besteht. Die Zahlendarstellung ist halblogarithmisch, d.h. der Stellenwert ergibt sich durch Multiplikation der Mantisse mit der Zehnerpotenz, die der auf die tiefgesetzte 10 folgende Exponent angibt.

in ähnlichen Fällen als Maß für den Fehler den Wert an, der sich bei Wiederholung der Rechnung mit in den einzelnen Schritten erhöhter Genauigkeit als Abweichung zwischen den beiden approximativen Endwerten einstellt. Dieser empirische Weg könnte jedoch hier bisher nicht eingeschlagen werden, da die Durchführung der Beispielrechnung mit höherer Genauigkeit die Maschinenkapazität, deren Grenze ohnehin praktisch erreicht war, übermäßig in Anspruch genommen hätte. Auf Grund der genauer bekannten Fehler der einzelnen Rechenschritte (Fehler bei der Aufmaßberechnung, Fehler bei der Berechnung des Integranden, Fehler bei der Einfachintegration, Fehler bei der Bestimmung des Doppelintegrals, Fehler beim Iterationsprozeß) läßt sich jedoch ein gewisses Bild gewinnen. Danach dürfte der Fehler der Quellbelegung, soweit der Iterationsprozeß bis auf etwa 1% Schlußabweichung führt, insgesamt zwischen 2 und höchstens 5% liegen. Daß sich alle genannten Fehler durch Vergrößerung des Aufwandes im Prinzip beliebig verringern lassen, ist nach dem Gesagten selbstverständlich.

### 3.4 Berechnung des Strömungsfeldes

Ist die Körperbelegung bekannt, so kann man die Berechnung von Geschwindigkeiten im Strömungsfeld nach dem einfachen Prinzip vornehmen, die Summe aller, von den verschiedenen Strömungsursachen herrührenden Wirkungen zu bilden. Insbesondere herrscht in einem Aufpunkt  $P(x, y, z)$  der Körperoberfläche die tangential zum Körper gerichtete Geschwindigkeit

$$\frac{w_T(x, z)}{w_0} = \frac{w_0(x, z)}{w_0} + \frac{w_\varepsilon(x, z)}{w_0} + \frac{\varepsilon(x, z)}{2} \cdot n_0(x, z) \quad (3.23)$$

Dabei ist  $w_\varepsilon(x, z)/w_0$  das Integral der von der Quellbelegung induzierten Geschwindigkeiten, ein Vektor, dessen Normalkomponente bereits in den Gln. (3.10) und (3.12) auftrat:

$$\frac{w_\varepsilon(x, z)}{w_0} = \frac{2T}{4\pi L} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \varepsilon(x', z') \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{B}{L}\right)^2 y_x^2(x', z') + \left(\frac{B}{2T}\right)^2 y_z^2(x', z')} \cdot \frac{\frac{r}{L/2}}{\left(\frac{r}{L/2}\right)^3} dx' dz' \quad (3.24)$$

Dieses Doppelintegral wird für  $P(x, y, z) = Q(x', y', z')$  ähnlich wie das Integral (3.21) für die Normalkomponente der Geschwindigkeit singular. Man muß daher in ganz entsprechender Art wie oben auf eine näherungsweise Integration durch Reihenentwicklung oder auf andere praktische Integrationsmethoden zurückgreifen.

Aus der Tangentialgeschwindigkeit  $w_T(x, z)/w_0$  ergibt sich nach der Bernoullischen Gleichung die auf der Körperoberfläche herrschende Druckverteilung:

$$\frac{\Delta p(x, z)}{q} = 1 - \left(\frac{w_T(x, z)}{w_0}\right)^2 \quad (3.25)$$

Auf die Auswertung der Ausdrücke (3.23) und (3.25), die im folgenden nicht von Bedeutung sind, ist im Rahmen dieser Arbeit verzichtet worden.

Dagegen ist im Zusammenhang dieser Untersuchung von großem Interesse die Ziffer des reinen nominellen Verdrängungsmittstroms, die im engeren Sinne ihrer Definition dem durch Wirkung der Quellbelegung des Körpers in der Arbeitsebene des Propellers induzierten (axialen), auf die Anströmgeschwindigkeit  $w_0$  bezogenen Geschwindigkeitsfeld gleich ist und aus Gl. (3.24) durch Bildung der negativen Axialkomponente in der Propellerebene hervorgeht.

$$\psi_{v_0}(x, z) = -\frac{2T}{4\pi L} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varepsilon(x', z') (x - x') \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{L}\right)^2 y_x^2(x', z') + \left(\frac{B}{2T}\right)^2 y_z^2(x', z')}}{\left[\left(\frac{r_\psi}{L/2}\right)(x, z, x', z')\right]^3} dx' dz' \quad (3.26)$$

mit  $\frac{r_\psi}{L/2} = \left\{ x - x'; \frac{B}{L}(y - y'); \frac{2T}{L}(z - z') \right\}$  = Vektor von dem auf der Körperoberfläche liegenden Quellpunkt  $Q(x', y', z')$  zu dem in der Propellerebene liegenden Aufpunkt  $P(x, y, z)$ .

In Abschn. 5 sind Ergebnisse über das nach Gl. (3.26) berechnete Mittstromfeld mitgeteilt.



#### 4. Berücksichtigung der Propellerströmung

##### 4.1 Gedankenmodell für den Propeller

Die komplizierte Strömung, die ein hinter dem Schiffsheck arbeitender Propeller hervorruft, läßt sich im Rahmen von potentialtheoretischen Wechselwirkungsuntersuchungen der vorliegenden Art nur mit Hilfe grundlegender Vereinfachungen behandeln. Als ein einfaches Gedankenmodell, bei dem die wesentlichen Züge des Erscheinungsbildes erhalten bleiben und das zu sehr übersichtlichen Ergebnissen führt, hat sich in der Wechselwirkungstheorie die kontinuierlich belegte Senkenscheibe (oder, was im Falle konstanter Belegungsstärke auf das gleiche hinauskommt, der halbunendliche Wirbelringzylinder) bewährt [6], [7]. Durch die Annahme einer Senkenscheibe werden in erster Linie alle instationären Strömungserscheinungen ausgeschaltet, und das resultierende Strömungsfeld entspricht in dieser Hinsicht dem Feld eines unendlichflügeligen Propellers. Ferner werden alle im Propellerstrahl in tangentialer Richtung wirksamen Strömungsprozesse gegenüber den axialen vernachlässigt. Man bewegt sich also insoweit im Gültigkeitsbereich der einfachen Strahltheorie von Rankine.

Eine weitere Vereinfachung wird im allgemeinen beim Ansatz der Beziehung zwischen Belegungsstärke  $e$  der Senkenscheibe und dem Propellerschubbelastungsgrad  $c_{S_0}$  vorgenommen. Der Zusammenhang

$$\frac{e}{w_0} = -1 + \sqrt{1 + c_{S_0}} \quad (4.1)$$

mit  $c_{S_0} = \frac{S}{\rho/2 \cdot w_0^2 \cdot \pi R_P^2}$

wurde von Dickmann [6] aus den hydrodynamischen Gleichgewichtsbedingungen mit Hilfe eines Näherungsverfahrens von Oseen [37] als zumindest für mäßige Schubbelastungsgrade ( $c_{S_0} < 1$ ) gültig hergeleitet. Oberhalb von  $c_{S_0} \approx 1$  verliert die Beweisführung nach Dickmann ihre Tragfähigkeit, und daher kann die Zuordnung zwischen Schub und Belegungsstärke nach Gl. (4.1) für höhere Belastungsgrade unter Umständen fehlerhaft sein. Da jedoch in dem für die Wechselwirkung wichtigen Zustrombereich zur Senkenscheibe der Strömungsverlauf im wesentlichen propellergerecht bleibt, sind im folgenden auch für höhere Schubbelastungsgrade bis zu  $c_{S_0} = 8$  Berechnungen nach Gl. (4.1) durchgeführt worden, um sich bei der Untersuchung der Abhängigkeit der Strömung und des Sogs vom Belastungsgrad auf möglichst deutliche Effekte stützen zu können (s. zu diesem Zusammenhang auch [7]).

Der Ansatz (4.1) gilt für eine Senkenscheibe, die mit einer über den Querschnitt gleichförmigen Geschwindigkeit  $w_0$  angeströmt wird. Nach einem Vorschlag von Dickmann kann man nun die Anwendung des Senkenscheibenmodells auch auf Fälle mit ungleichförmiger Anströmung ausdehnen, wenn man voraussetzt, daß die Propellerflächenelemente  $dF$  jeweils Elementarpropeller mit einem so niedrigen örtlichen Schubbelastungsgrad

$$c_S(r, \varphi) = \frac{c_{S_0}}{[1 - \psi(r, \varphi)]^2} \quad (4.2)$$

mit  $r = \frac{R}{R_P}$  = dimensionslose radiale Koordinate in der Propellerebene,

$\varphi$  = Winkelkoordinate in der Propellerebene

darstellen, daß sich die Elementarstrahlen nicht gegenseitig beeinflussen.

Werden also die Senkenelemente der Propellerfläche entsprechend  $\psi(r, \varphi)$  mit der ungleichförmigen Geschwindigkeit  $w_P(r, \varphi) = w_0(1 - \psi(r, \varphi))$  angeströmt, so ergibt sich für die örtliche Belegungsstärke in Analogie zu Gl. (4.1) (s. a. [7]):

$$\frac{e(r, \varphi)}{w_P(r, \varphi)} = -1 + \sqrt{1 + c_S(r, \varphi)} \quad (4.3)$$

oder:

$$\frac{e(r, \varphi)}{w_0} = -[1 - \psi(r, \varphi)] + \sqrt{[1 - \psi(r, \varphi)]^2 + c_{S_0}}$$

Aus dem Mittelwert der Mitstromziffer in der Propellerfläche (Volumenmittel)

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \psi(r, \varphi) \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \quad (4.4)$$

läßt sich ferner ein Gesamtschubbelastungsgrad des Propellers in ungleichförmiger Zuströmung bilden, der als Parameter bei Vergleichsbetrachtungen eine Rolle spielt (vgl. Abschn. 5.5):

$$c_{SP} = \frac{S}{\rho/2 \cdot w_0^2 (1 - \bar{\varphi})^2 \cdot \pi R_P^2} \quad (4.5)$$

Hierin ist also (vgl. auch [6]) die Zustromgeschwindigkeit zum Propeller  $w_P(\tau, \varphi)$  durch ihren Mittelwert in der Propellerebene gekennzeichnet worden.

#### 4.2 Berücksichtigung in der Integralgleichung

Bei der Erzeugung des schiffsähnlichen Doppelkörpers durch Spiegelung an der Schwimmebene entsteht auch ein Spiegelbild des Propellers (s. Abb. 5), so daß der Einfluß zweier Senkenseheiben auf das Strömungsfeld zu berücksichtigen ist.

Abweichend von früheren Arbeiten [7], [9] wird hier die der Propellerstörung entsprechende Belegung getrennt vom Transportströmungseinfluß bestimmt. Dies hat bei den numerischen Berechnungen vor allem den Vorteil, daß der Rechenaufwand bei der Iteration unmittelbar der gesuchten zusätzlichen Belegung allein zugute kommt und nicht gleichzeitig der an sich bekannten Grundbelegung für den Körper ohne Propeller.

Die Zulässigkeit dieser Aufteilung beruht auf der Superponierbarkeit von Lösungen der Potentialgleichung. Dementsprechend ergeben sich bei der anschließenden Zusammenfassung von Körper- und Propellerpotentialströmung die Potentiale und die Belegungen durch skalare Addition und die Geschwindigkeiten im Feld durch vektorielle Addition der den Teilfeldern entsprechenden Größen.

Die in einem Aufpunkt  $P$  der Körperoberfläche von den beiden durch die Indizes 1 und 2 gekennzeichneten Propellern induzierte Störgeschwindigkeit in normaler Richtung erhält man auf Grund des quadratischen Abstandsgesetzes (3.6) — in ganz entsprechender Weise wie bei der von der Körperbelegung induzierten Störgeschwindigkeit nach Gl. (3.10) — durch Integration über die von den Senkenelementen beider Propeller hervorgerufenen Geschwindigkeitsdifferenziale, wobei die Senkenenergiebigkeit im allgemeinen Fall gem. Gl. (4.3) als in der Propellerebene variabel anzusetzen ist:

$$\frac{w_{eN}(x, z)}{w_0} = \sum_{1:2} n_0(x, z) \cdot R_P^2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{-e(r, \varphi)}{4\pi w_0} \cdot \frac{r_{e_{1:2}}}{|r_{e_{1:2}}|} \cdot \frac{1}{|r_{e_{1:2}}|^2} \cdot r dr d\varphi$$

mit  $n_0(x, z)$  gem. Gl. (3.16). (4.6)

Hierbei ist entsprechend Abb. 9:

$$r_{e_{1:2}} = r_{OP} - r_{M_{1:2}} - r_{P_{1:2}} \quad = \text{Vektor vom Senkenelement in der Propellerebene zum Aufpunkt auf der Körperoberfläche} \quad (4.7)$$

mit  $r_{OP} = \frac{L}{2} \left\{ x; \frac{B}{L} y; \frac{2T}{L} z \right\}$  = Aufpunktvektor

$$r_{M_{1:2}} = \frac{L}{2} \left\{ x_M; \frac{B}{L} y_M; \frac{2T}{L} z_{M_{1:2}} \right\} \quad = \text{Radiusvektor zu den Mittelpunkten der beiden Propeller} \quad (4.8)$$

$$r_{P_{1:2}} = \frac{L}{2} \left\{ 0; \frac{B}{L} y_P; \frac{2T}{L} z_{P_{1:2}} \right\} \quad = \text{Vektor vom Propellermittelpunkt zum Senkenelement in der Propellerebene}$$

worin die Komponenten des Vektors  $r_{P_{1:2}}$  in Polarkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{R_P}{B/2} \cdot r \cos \varphi \\ z_{P_1} &= \frac{R_P}{T} \cdot r \sin \varphi \\ z_{P_2} &= -\frac{R_P}{T} \cdot r \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.9)$$

Damit ergibt sich für den Propellereinfluß das „Störglied“

$$g_P(P) = -2 \frac{w_{eN}}{w_0}, \quad (4.10)$$

so daß die Integralgleichung (3.13) hier die für die reine Propellerstörung gültige Form erhält:

$$\varepsilon_P(P) + \iint_{F_Q} \varepsilon_P(Q) \cdot K(P, Q) \cdot dF_Q = g_P(P) \quad (4.11)$$

Hat man die einer gegebenen Propellersenkenbelegung  $e(r, \varphi)$  und somit einer bestimmten Propellerströmung  $[g_P(P)]$  zugeordnete (zusätzliche) Körperbelegung  $\varepsilon_P$  auf Grund von Gl. (4.11) gefunden, so kann man daraus analog zu den Darlegungen in Abschn. 3.4 [Gl. (3.26)] eine entsprechende Geschwindigkeitsverteilung im Feld berechnen, die infolge ihrer Zuordnung zu einer reinen Propellerströmung als Unterschied zwischen einem effektiven und einem nominellen Verdrängungsmittromfeld zu deuten ist.

Allerdings wird das auf diesem Wege, nämlich durch Superposition dieses Differenz-Feldes und des nominellen Mittromfeldes gewonnene, resultierende effektive Verdrängungsmittromfeld normalerweise nicht von vornherein mit demjenigen übereinstimmen, das als Zuströmung zum Propeller für die Ausgangsfestlegung der Senkenbelegung angenommen wurde; vielmehr muß man in schrittweisem Vorgehen die Senkenbelegung aus dem errechneten Mittromfeld auf Grund von Gl. (4.3) neu ermitteln, die Integralgleichung (4.11) wiederum lösen, den Mittrom abermals berechnen usw., bis man feststellt, daß der vorgegebene, in Gl. (4.3) eingesetzte und der über die Körperbelegung neu ermittelte Verdrängungsmittrom übereinstimmen und damit auch die Senkenbelegung des Propellers ihren Endzustand erreicht hat.

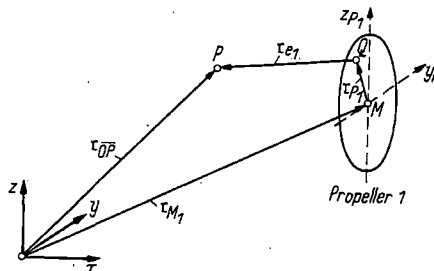


Abb. 9. Definition des Vektors vom Senkenpunkt in der Propellerebene zum Aufpunkt auf der Körperoberfläche.

### 4.3 Beispiel für die Lösung der Integralgleichung der Körperumströmung im Propellerstölfeld

Als erstes Beispiel für die Behandlung der Integralgleichung (4.11) wird eine Anordnung gem. Abb. 5 betrachtet, bei der hinter dem gegebenen schiffsähnlichen Körper ein Senkenscheibenpropeller vom Durchmesser  $D_P = 0,6 T$  im Abstand  $X_P = 0,01 \cdot L/2$  ( $x_P = 1,01$ ) hinter dem senkrechten Hintersteven mit der Propellerachse auf halber Höhe des Hinterstevens ( $z_P = 0,5$ ) arbeitet.

Die Iterationsberechnung für das gegebene Stölfeld  $g_P(P)$  läuft im Prinzip ganz entsprechend ab, wie unter 3.2 und 3.3 für die reine Körperumströmung  $[g(P)]$  erläutert. Weil das Propellerstölfeld nicht symmetrisch zum Hauptspant ist, müßte zwar grundsätzlich für das Vorschiff eine besondere Quellbelegung berechnet werden, was die Anzahl der Aufpunkte verdoppeln würde. Da andererseits die Propellerstörung bekanntlich nach vorn sehr rasch abklingt (siehe z. B. [39]) und im Vorschiffsbereich keine praktisch zu berücksichtigenden Werte mehr erreicht, ist aber die Quellbelegung  $\varepsilon_P$  im Vorschiff bei den numerischen Rechnungen vernachlässigt worden. Mit dieser Vereinfachung ist es möglich, für die Ermittlung der  $g_P(P)$  mit Hilfe eines Rechenautomaten das gleiche Iterationsprogramm wie für die  $g(P)$  zu benutzen. Besonders ins Gewicht fällt dabei der Vorteil, daß auch der gleiche Integrationsraster wie unter 3.3 verwendet werden und damit auf die anfangs berechneten Kernfunktionswerte, die man zweckmäßig bei der ersten Rechnung mit Hilfe der Magnetbandorganisation rettet, zurückgegriffen werden kann.

Abb. 10 zeigt Ausgangsnäherung  $\varepsilon_{P_0}(x, z) = g_P(x, z)/2$  und Iterationslösung  $\varepsilon_P(x, z)$ , wobei die Störfunktion  $g_P$  aus der Annahme gleichförmiger Anströmung  $w_0$  des Propellers bestimmt worden ist. Die übrigen Ergebnisse werden in Abschn. 5 besprochen.

### 4.4 Berechnung der Wechselwirkungsgrößen

Da über die Verteilung der Zustromgeschwindigkeiten zur Propellerebene zunächst nichts Näheres bekannt ist, kann man — wie in Abschn. 4.2 bereits erwähnt — den alle Gleichgewichtsbedingungen (sowohl auf der Körperoberfläche als auch in der Propellerebene) befriedigenden Strömungszustand praktisch nur in mehreren Schritten aufbauen, indem man von der ungestörten, gleichförmigen Anströmung  $w_0$  des Propellers als Ausgangsnäherung ausgeht und dessen gleichmäßige Senkenbelegung gem. Gl. (4.1) über  $c_{S_0}$  ermittelt. Daraus ergibt sich durch Lösung der Integralgleichung (4.11) eine erste Näherung für die der Propellerstörung  $g_P(P)$  entsprechende Körperbelegungsstärke  $\varepsilon_P$ . Anschließend läßt sich analog zu Gl. (3.26), worin  $\varepsilon_P$  an Stelle von  $\varepsilon$  einzuführen ist, eine Geschwindigkeitsverteilung in der Propellerebene bestimmen, die als erste Näherung für den Unterschied zwischen effektivem und nominellem Verdrängungsmittrom  $\psi_{V_{0e}} - \psi_{V_0}$  anzusehen ist.

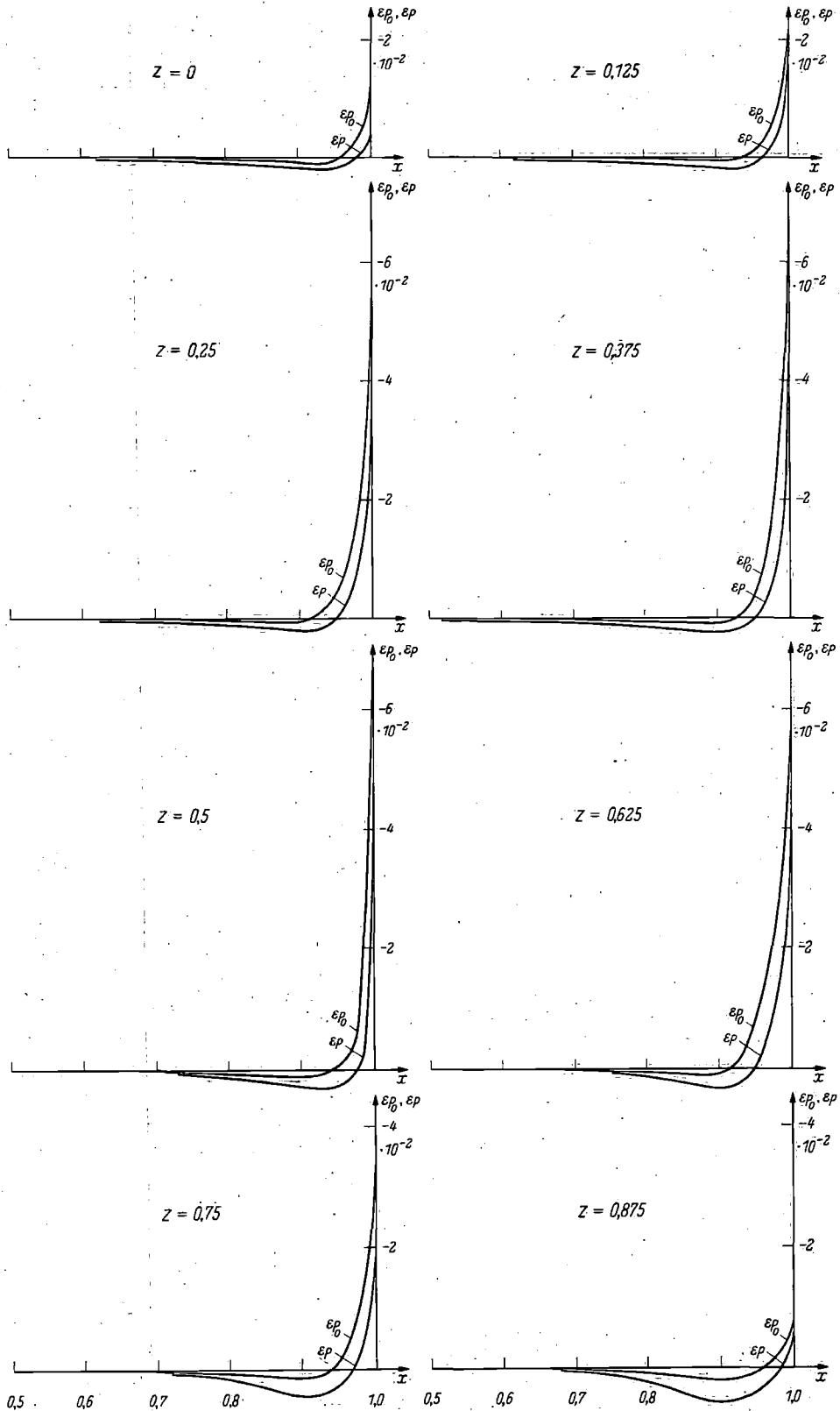


Abb. 10 Ausgangsnäherung  $\epsilon_0$  und Iterationslösung  $\epsilon_p$  für die Körperquellbelegung in reiner Propellerströmung für  $z = 0$  bis  $z = 0,875$  (Propellerlage  $x_p = 1,01$ ).

In Abschn. 5.2 wird ein derartiges Differenzfeld wiedergegeben und erörtert, das für den Körper und die Propelleranordnung nach Abb. 5 errechnet wurde. Die numerische Durchführung weiterer Schritte des in Abschn. 4.2 erläuterten, vermutlich sehr schnell konvergierenden Iterationsverfahrens ist grundsätzlich durchaus von Interesse, wurde mit Rücksicht auf den Aufwand hier jedoch vorerst zurückgestellt, zumal der erste Iterationsschritt bereits einen wesentlichen Teil des gesamten Effektes erfassen dürfte.

Aus dem Mitstromfeld und der Propellersenkenbelegung erhält man nach dem Prinzip von Lagally in der Form von Betz [38] und Diekmann [6] die Sogkraft in reiner Verdrängungsströmung:

$$\Delta W_V = \varrho/2 \cdot w_0^2 \cdot \pi R_P^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2}{\pi} \cdot \frac{e(r, \varphi)}{w_0} \cdot \psi_{V_{0e}}(r, \varphi) \cdot r dr d\varphi \quad (4.12)$$

Als dimensionsloses Maß wird hier der für den Zweck des hydrodynamischen Vergleichs besonders geeignete Sogwert  $\Delta c_{w_N}$  definiert:

$$\Delta c_{w_N} = \frac{\Delta W_V}{\varrho/2 w_0^2 \pi R_P^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{e(r, \varphi)}{w_0} \cdot \psi_{V_{0e}}(r, \varphi) r dr d\varphi \quad (4.13)$$

Bei den bisher durchgeführten Beispielrechnungen sind hiernach aus den ermittelten Näherungen für  $e(r, \varphi)$  und  $\psi_{V_{0e}}(r, \varphi)$  entsprechende angenäherte Sogwerte ermittelt worden. Dabei entspricht dem Ausgangsschritt der Iteration die Annahme gleichförmiger Zuströmung zum Propeller, d. h. konstanter Senkenbelegung  $e/w_0$ ; in teilweiser Vorwegnahme des zweiten Iterationsschrittes kann man in bezug auf den Sog aber noch zu einer etwas besseren Annäherung an den Schlußzustand kommen, wenn man in Gl. (4.13) neben dem Mitstrom  $\psi_{V_{0e}}(r, \varphi)$  der ersten Näherung bereits die über Gl. (4.3) mit diesem Mitstromfeld ermittelte veränderliche Belegungsfunktion  $e(r, \varphi)$  der zweiten Näherung berücksichtigt. Im Sinne dieser beiden Annahmen berechnete Sogwerte werden in Abschn. 5.4 wiedergegeben und vergleichend interpretiert.

## 5. Ergebnisse

### 5.1 Reiner nomineller Verdrängungsmitstrom

Der reine nominelle Verdrängungsmitstrom  $\psi_{V_0}$  kann auf dem in Abschn. 3 beschriebenen potentialtheoretischen Wege [gem. Gl. (3.26)] für schiffsähnliche Körper berechnet werden. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, die Erkenntnis über den an Ersatzkörpern bereits gewonnenen Stand hinaus zu erweitern.

Die Ergebnisse einer Beispielrechnung für den in Abschn. 2 beschriebenen Körper zeigen die Abb. 11a und 11b in einer Isotachendarstellung des Mitstromfeldes in der Propellerenebene und in einer Auftragung über der Winkelordinate. Der Charakter des Feldes entspricht im Gesamtbild und insbesondere in der Erreichung von Maximalwerten hinter dem Totholz den gewohnten Vorstellungen, jedoch mit dem Unterschied, daß im Totholzgebiet ( $\varphi \approx \pm 90^\circ$ ) nicht so jähe Anstiege auftreten wie bei Gesamtmitstromauftragungen, wo sich zusätzlich der in Hecknähe besonders konzentrierte Reibungsmitstrom auswirkt.

Die Erscheinung, daß die in der oberen Hälfte der Propellerenebene auftretenden Werte des Verdrängungsmitstroms größer sind als in der unteren, ist durch die oben völligeren Wasserlinien ebenfalls leicht zu erklären.

### 5.2 Reiner effektiver Verdrängungsmitstrom

Die Frage nach dem Unterschied zwischen dem reinen nominellen und dem reinen effektiven Verdrängungsmitstrom ist von besonderer Bedeutung für die Entwurfs- und Versuchspraxis. Die ersten potentialtheoretischen Berechnungsergebnisse zu diesem Problem sind wohl von Amtsberg [7] für schlanke, spitz auslaufende Rotationskörper mitgeteilt worden. Dort waren keine

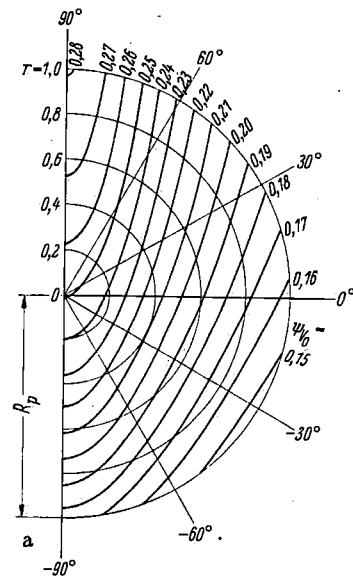


Abb. 11 a. Nominelles Mitstromfeld in Isotachendarstellung.

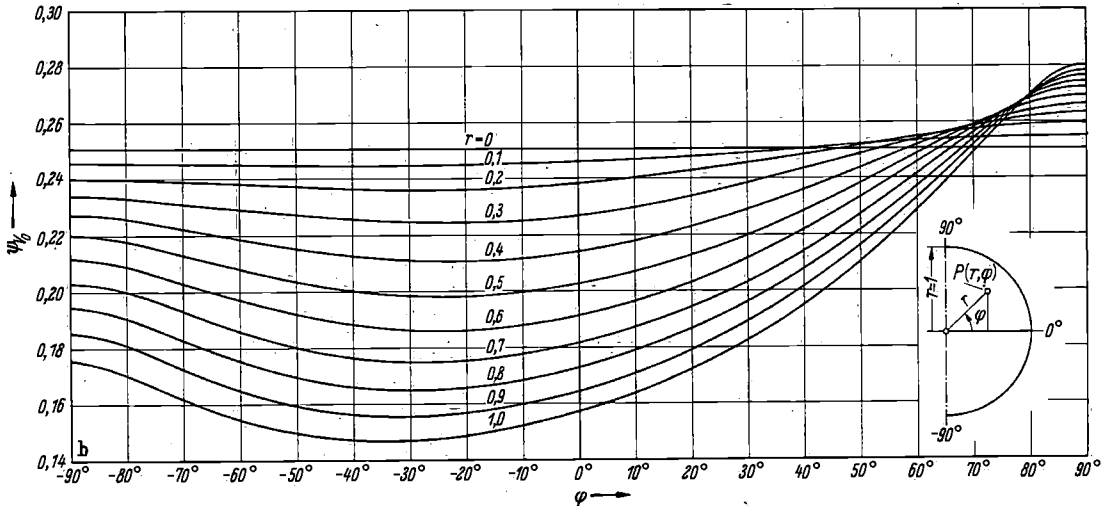


Abb. 11 b. Abhängigkeit des nominellen Mitstroms von  $\varphi$  und  $r$ .

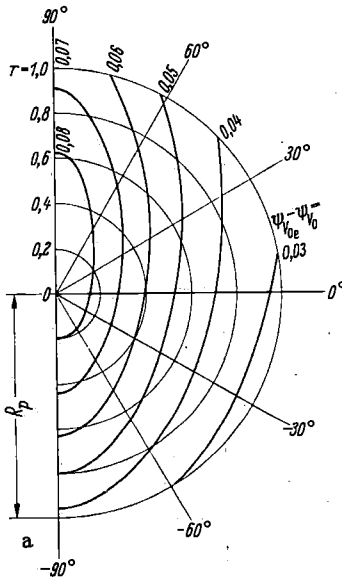


Abb. 12 a. Differenz zwischen nominellem und effektivem Mitstrom für  $c_{S_0} = 8$  in Isotachendarstellung.

nennenswerten Effekte festzustellen. Dagegen konnte Pohl [10] auf Grund von Wechselwirkungsberechnungen an einem unendlich langen Zylinder elliptischen Querschnitts bereits darauf hinweisen, daß der effektive Mitstrom mit steigender Schubbelastung im Mittel zunimmt, wenn auch in einem im Schiffsbereich ( $c_{S_0} \approx 1$ ) nicht besonders spürbaren Maße.

Die Abb. 12a und 12b zeigen nun die für das vorliegende Beispiel berechnete Differenz zwischen nominellem und effektivem Mitstromfeld, und zwar für den relativ hohen Schubbelastungsgrad  $c_{S_0} = 8$ . Die Ergebnisse sind unter der Annahme gleichförmiger Anströmung  $w_0$  der Propellerebene und somit konstanter Senkenbelegung  $e/w_0$  errechnet worden und stellen daher im Sinne des Abschn. 4.3 eine erste Näherung dar.

Das unter diesen Voraussetzungen errechnete Differenz-Mitstromfeld (Abb. 12a u. b) ist (wie man gem. Gln. (4.6), (4.10), (4.11) und (3.26) erkennt) der gegebenen Senkenbelegung  $e$  linear proportional. Der Unterschied zwischen nominellem und effektivem Mitstromfeld folgt also (in erster Näherung) in der Propellerebene ebenso wie im übrigen Feld der durch den Faktor  $e/w_0$  gem. Abb. 16 [vgl. Gl. (4.1)] gegebenen Abhängigkeit von  $c_{S_0}$ .

Von besonderem Interesse ist der Charakter des ermittelten Differenz-Mitstromfeldes. Die Isotachendarstellung

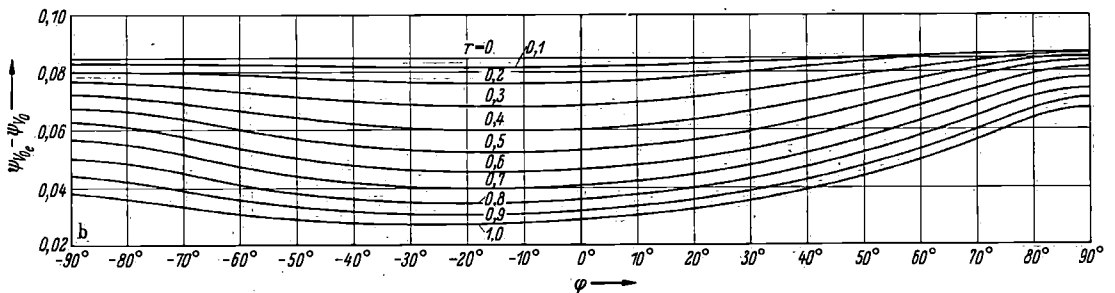


Abb. 12 b. Abhängigkeit der Differenz zwischen nominellem und effektivem Mitstrom für  $c_{S_0} = 8$  von  $\varphi$  und  $r$ .

(Abb. 12a) zeigt (wie beim nominellen Verdrängungsmittstrom gem. Abb. 11a) eine Konzentrierung im schiffsnahen Bereich des hinteren Tothholzes. Jedoch hat das Differenz-Verdrängungsmittstromfeld einen etwas an Rotationssymmetrie erinnernden Charakter. Hierin äußert sich die Tatsache, daß die vom Propellerstörfeld hervorgerufene Gegenbelegung des Körpers im Bereich des Hinterstevens ihre größten Werte in den der Propellermitte am nächsten liegenden Partien des Hecks erreicht und von dort mit der Entfernung aus dem Zentrum der Propellerzuströmung abnimmt.

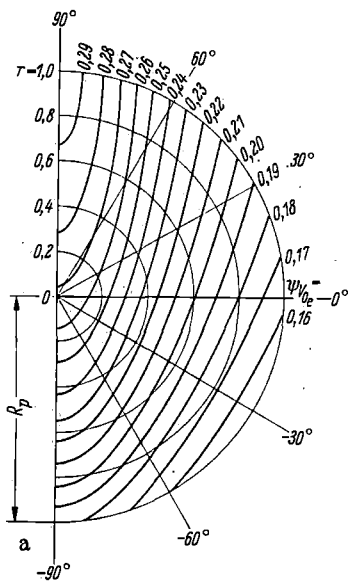


Abb. 13a. Effektives Mittstromfeld für  $c_{S_0} = 1$  in Isotachendarstellung.

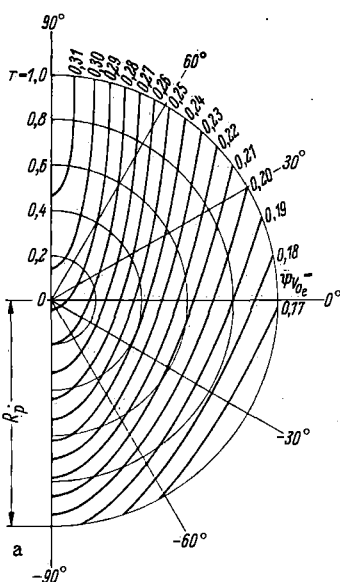


Abb. 14a. Effektives Mittstromfeld für  $c_{S_0} = 3$  in Isotachendarstellung.

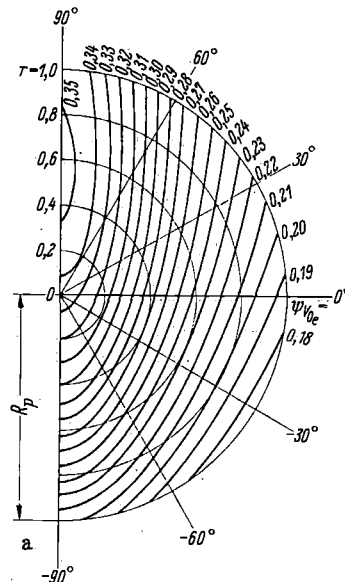


Abb. 15a. Effektives Mittstromfeld für  $c_{S_0} = 8$  in Isotachendarstellung.

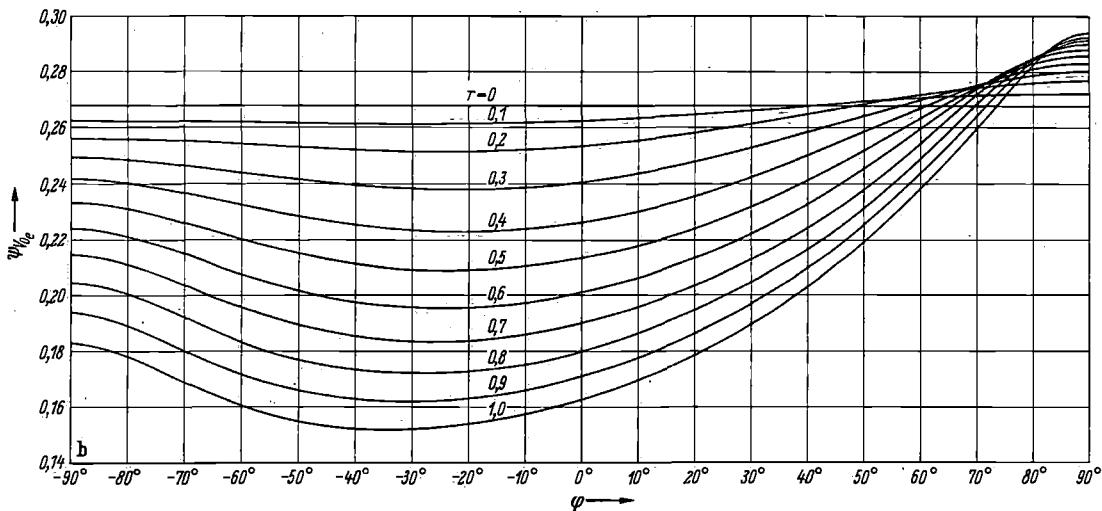


Abb. 13b. Abhängigkeit des effektiven Mittstroms für  $c_{S_0} = 1$  von  $\varphi$  und  $r$ .

Durch Superposition des nominellen Verdrängungsmittstroms nach Abb. 11a und des für die einzelnen Schubbelastungsgrade  $c_{S_0} = 1, 3$  und  $8$  errechneten Differenzmittstroms nach Abb. 12 ergeben sich die reinen effektiven Verdrängungsmittstromfelder, die in den Abb. 13 bis 15 dargestellt sind. Man erkennt die allmähliche Zunahme des Propellereinflusses bei steigender Belastung. Bei  $c_{S_0} = 1$ , d. h. im Bereich der Entwurfspraxis sind die Effekte allerdings ziemlich klein.

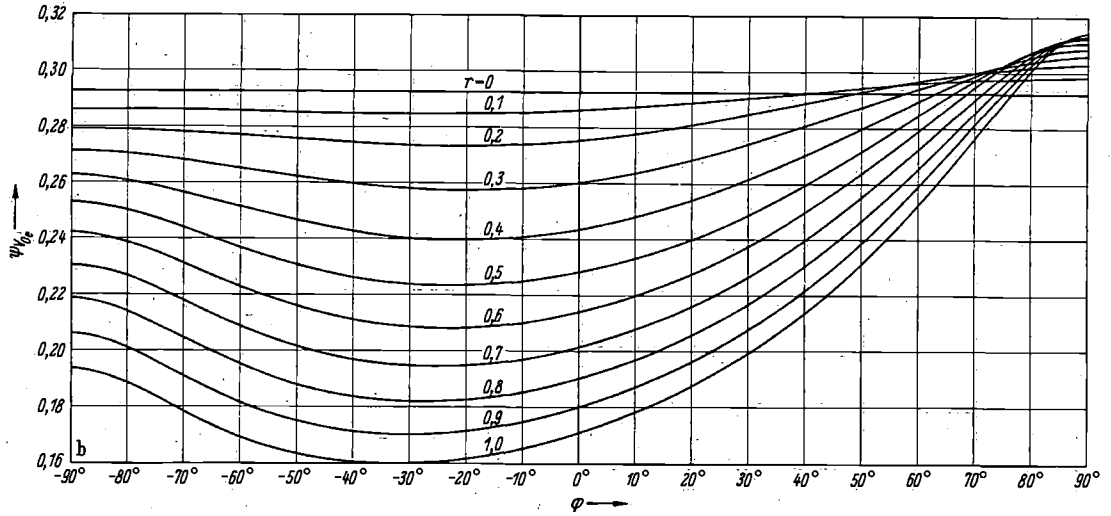


Abb. 14 b. Abhängigkeit des effektiven Mitstroms für  $c_{S_0} = 3$  von  $\varphi$  und  $r$ .

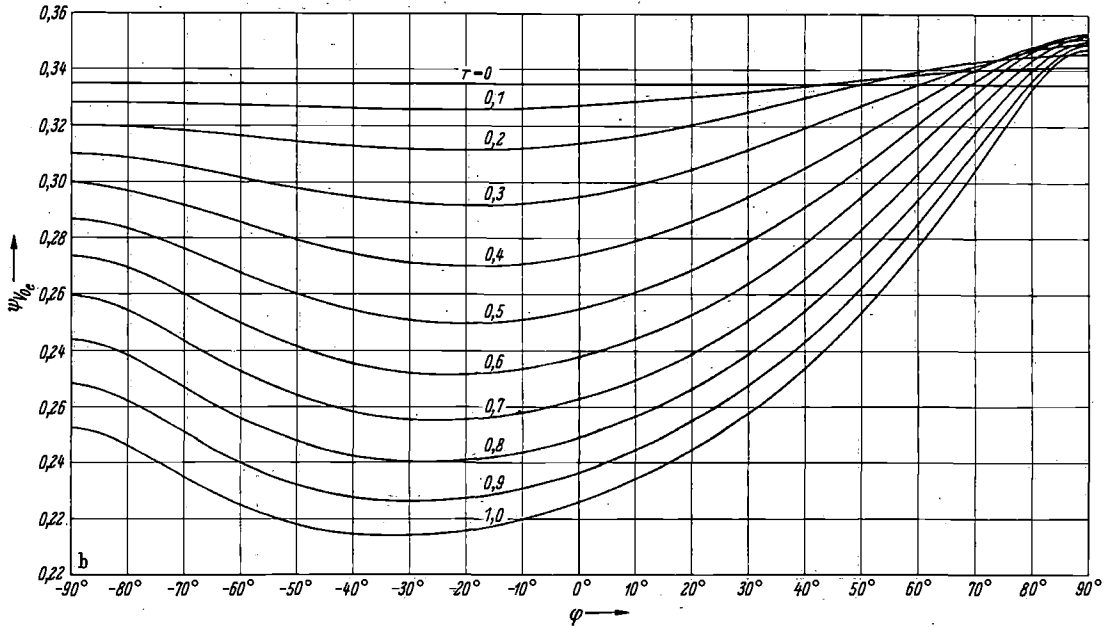


Abb. 15 b. Abhängigkeit des effektiven Mitstroms für  $c_{S_0} = 8$  von  $\varphi$  und  $r$ .

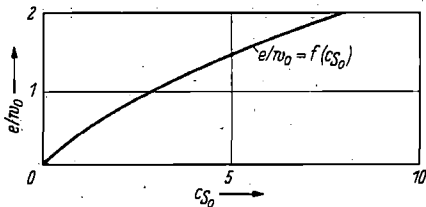


Abb. 16. Abhängigkeit der Senkenbelegung  $e/w_0$  vom Schubbelastungsgrad  $c_{S_0}$ .

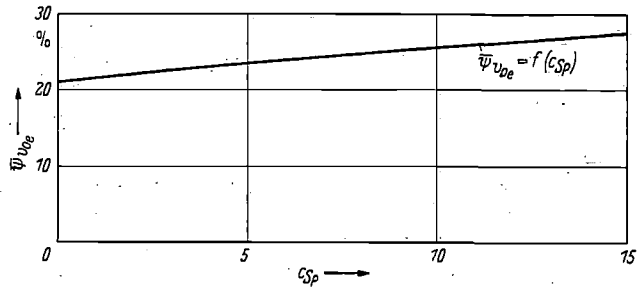


Abb. 17. Mittlerer effektiver Verdrängungsmittstrom als Funktion des Belastungsgrades  $c_{S_p}$ .



Auch der mittlere effektive Verdrängungsmittstrom  $\bar{\psi}_{V_0}$ , den man nach Gl. (4.4) definieren kann, wenn man unter dem Integral den örtlichen effektiven Mitstrom einführt, läßt nach Abb. 17 eine ganz allmähliche Zunahme mit  $c_{Sp}$  erkennen, was mit den Ergebnissen der Ersatzkörperuntersuchungen von Pohl ([10], [40]) in Einklang steht.

### 5.3 Gedanken über die übrigen Mitstromgrößen

Während die grundsätzlichen Zusammenhänge in bezug auf die Wellenmittromfelder nach Dickmanns Untersuchungen [5] weitgehend als geklärt gelten können, ist die Ermittlung der dem Einfluß der Zähigkeit unterliegenden Mitstromfelder unter schiffsähnlichen Verhältnissen bisher nicht möglich, da die Berechnung der allgemeinen, räumlich gekrümmten Grenzschicht auf große Schwierigkeiten stößt. Es dürfte daher von Bedeutung sein, daß durch Verfahren der hier beschriebenen Art zur Berechnung der potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung um schiffsähnliche Körper wenigstens die Ausgangsbasis für nähere grenzschichttheoretische Untersuchungen geschaffen ist.

Auch zu der wichtigen Frage, ob — wie beim Verdrängungsmittstrom festgestellt — auch bei den übrigen Mitstromfeldern und damit beim Gesamtmitstrom die Differenz zwischen nominellem und effektivem Feld bei normalen Schubbelastungsgraden ( $c_{S_0} \approx 1$ ) gering ausfällt, kann die vorliegende potentialtheoretische Untersuchung nur indirekte Hinweise geben. Geht man von der Voraussetzung aus, daß durch die Wirkung des Propellers die Verhältnisse in der Grenzschicht nicht grundlegend (wie etwa durch die Modifizierung oder Beseitigung von Ablösungserscheinungen) verändert werden, so scheint die Vermutung berechtigt, auch beim Gesamtmitstrom könne der Propellereinfluß auf das nominelle Feld nicht viel beträchtlicher sein als in reiner Verdrängungsströmung.

Eine gewisse Bestätigung hierfür läßt sich vielleicht auf dem Wege erbringen, daß man das gemessene nominelle Gesamtmitstromfeld zum Ausgang von Rechnungen der für den Verdrängungsmittstrom beschriebenen Art nimmt und über die entsprechende Singularitätenbelegung des Körpers das zugehörige effektive Feld bestimmt. Gegen dieses Verfahren könnte man zwar grundsätzlich einwenden, daß der Gesamtmitstrom durch seine Abhängigkeit von der Zähigkeit kein für die Verarbeitung in der Integralgleichung (3.13) exakt zulässiges Störfeld darstellt; jedoch dürften sich durch eine derartige Rechnung wenigstens qualitativ zutreffende Vorstellungen gewinnen lassen.

### 5.4 Reiner Verdrängungssog

Dieser in reiner Potentialströmung auftretende Soganteil ist in letzter Zeit wiederholt Gegenstand von Berechnungen gewesen. Neben den Ergebnissen von Hunziker [8] für das Rotationsellipsoid und von Dreger [9] und Amtsberg [7] für spindelförmige Rotationskörper liegen auch Angaben von Pohl [10] über die an einem elliptischen Zylinder auftretenden Soggrößen vor.

In der vorliegenden Arbeit ist nun für einen schiffsähnlichen Körper (nach Abb. 4 und 5) eine potentialtheoretische Sogberechnung durchgeführt worden, deren Ergebnisse in Abb. 18 gezeigt werden. Zunächst sind die unter der Annahme gleichförmiger Propelleranströmung, d. h. konstanter Belegungsstärke  $e/w_0$  nach Gl. (4.13) errechneten Werte  $\Delta c_{W_N} =$

$$= \frac{\Delta W_V}{\rho/2 \cdot w_0^2 \cdot \pi R_p^2} \text{ in Abhängigkeit vom zugeordneten Schubbelastungsgrad } c_{S_0} \text{ aufgetragen worden.}$$

Berücksichtigt man den errechneten mittleren effektiven Verdrängungsmittstrom  $\bar{\psi}_{V_0}$  im Schubbelastungsgrad  $c_{Sp}$  [Gl. (4.5)], so ergibt sich die nach rechts verschobene Kurve für  $\Delta c_{W_N} = f(c_{Sp})$ .

Schließlich kann man gem. Gl. (4.3) der Ungleichförmigkeit der Senkenbelegung Rechnung tragen. Durch sinngemäße, in Abschn. 4.4 erläuterte Anwendung von Gl. (4.13) erhält man die Kurve  $\Delta c_{W_Nu} = f(c_{Sp})$  für den Verdrängungssog einschließlich des Ungleichförmigkeitseinflusses. Die Sogvermehrung infolge dieses Einflusses ist, wie man nach Abb. 18 erkennt, im ganzen  $c_{Sp}$ -Bereich nicht sehr stark veränderlich und fällt daher bei niedrigen Sogwerten  $\Delta c_{W_N}$  und ent-

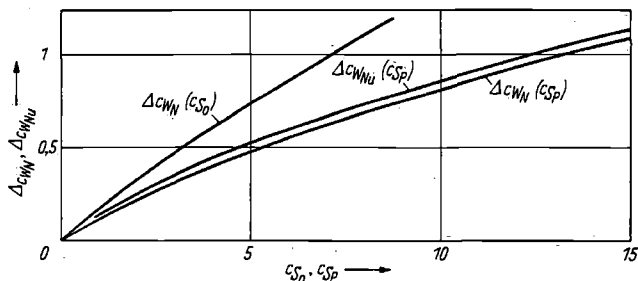


Abb. 18. Reiner Verdrängungssog ohne und mit Ungleichförmigkeitseinfluß.

sprechend mäßigen Belastungsgraden, wie sie für gewöhnliche Handelsschiffe in Frage kommen, besonders ins Gewicht. Beispielsweise errechnet sich für  $c_{Sp} = 1,64$ , d. h. für  $c_{S_0} = 1$  die Differenz  $\Delta c_{W_{Nu}} - \Delta c_{W_N} = 0,215 - 0,181 = 0,034 =$  etwa 19% von  $\Delta c_{W_N}$ .

Um den Ungleichförmigkeitssog  $\Delta c_{W_{Nu}} - \Delta c_{W_N}$  als Teil des gesamten Verdrängungssogs noch etwas näher zu analysieren, wird die äquivalente Senkenbelegung der Propellerebene  $e(r, \varphi)$  in einen der mittleren Anströmgeschwindigkeit [ $w_P = (1 - \bar{\psi}_{V_{0e}}) w_0$ ] entsprechenden konstanten Anteil  $e_0$  und die Abweichung davon aufgeteilt:

$$\frac{e(r, \varphi)}{w_0} = \frac{e_0}{w_0} + \frac{\Delta e(r, \varphi)}{w_0} \quad (5.1)$$

und der Mitstrom in Mittelwert — definiert analog Gl. (4.4) — und Schwankungsfunktion zerlegt:

$$\psi_{V_{0e}}(r, \varphi) = \bar{\psi}_{V_{0e}} + \Delta \psi_{V_{0e}}(r, \varphi) \quad (5.2)$$

Dann läßt sich der Gesamtsog nach Gl. (4.13) in vier Anteile aufgliedern:

$$\begin{aligned} \Delta c_{W_N} &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{e(r, \varphi)}{w_0} \cdot \psi_{V_{0e}}(r, \varphi) \cdot r \cdot dr d\varphi = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{e_0}{w_0} \cdot \bar{\psi}_{V_{0e}} \cdot r \cdot dr d\varphi + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{e_0}{w_0} \cdot \Delta \psi_{V_{0e}}(r, \varphi) \cdot r \cdot dr d\varphi + \\ &+ \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\Delta e(r, \varphi)}{w_0} \cdot \bar{\psi}_{V_{0e}} \cdot r \cdot dr d\varphi + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\Delta e(r, \varphi)}{w_0} \cdot \Delta \psi_{V_{0e}}(r, \varphi) \cdot r \cdot dr d\varphi \end{aligned} \quad (5.3)$$

Der erste Ausdruck stellt den in gleichförmiger Anströmung des Propellers mit der Geschwindigkeit  $w_P$  wirksamen Sog dar, während der zweite Term wegen der Definition von  $\Delta \psi_{V_{0e}}(r, \varphi)$  als Schwankung um den Mittelwert verschwinden muß. Der Ungleichförmigkeitssog baut sich daher aus dem dritten und vierten Glied auf.

Hieraus lassen sich einige Folgerungen ziehen. Gewöhnlich dürfte der Mitstrommittelwert  $\bar{\psi}_{V_{0e}}$  größer sein als seine aus  $\Delta \psi_{V_{0e}}(r, \varphi)$  zu bestimmende mittlere Schwankung, und daher liefert das dritte Integral im allgemeinen den Hauptanteil des Ungleichförmigkeitssogs. Allerdings kann sich diese Relation bei kleinen Mitstrommittelwerten  $\bar{\psi}_{V_{0e}}$  auch umkehren; dies wird besonders deutlich, wenn man an einen schublosen oder in verschwindendem mittlerem Mitstrom ( $\bar{\psi}_{V_{0e}} = 0$ ) arbeitenden Propeller denkt, da in beiden Fällen die ersten drei Integralausdrücke verschwinden, während der vierte von Null verschieden sein kann und dann die Erklärung für das Auftreten eines Sogs abgibt. (Auf die Möglichkeit, daß ein schubloser Propeller Sog erzeugt, hat auch Dickmann [6] schon hingewiesen.)

Von größerer praktischer Bedeutung ist die Tatsache (s. a. Abb. 18), daß der Ungleichförmigkeitssog bei niedrigen und normalen Schubbelastungsgraden bis zu  $c_{Sp}$  etwas oberhalb von Eins prozentual stärker ins Gewicht fällt als bei hohen Schubbelastungen. Dies erklärt sich daraus, daß im unteren Belastungsbereich die Grundbelegung  $e_0/w_0$  und der örtlich veränderliche Anteil  $\Delta e(r, \varphi)/w_0$  von vergleichbarer Größenordnung sind, während bei zunehmender Schubbelastung die steigende Belegung  $e_0$  sich relativ immer mehr zur Geltung bringt, so daß das den überwiegenden Teil des Ungleichförmigkeitseinflusses darstellende dritte Doppelintegral gegenüber dem ersten immer mehr an Bedeutung verliert.

### 5.5 Gedanken über die übrigen Soggrößen

Wie bereits einleitend erwähnt, werden die übrigen Soganteile nach vorherrschender Meinung als klein im Vergleich zum Verdrängungssog angesehen. Um in bezug auf die Einwände mancher Versuchspraktiker und insbesondere hinsichtlich des Maßstabesinflusses auf den Sog zu einer Klärung zu gelangen, ist es von großem praktischem Interesse, diesen Fragenkreis am unmittelbar schiffsähnlichen Beispiel durch Vergleich von Rechnungs- und Versuchsergebnissen erneut zu untersuchen, wofür Berechnungen der vorliegenden Art eine geeignete Grundlage sein können<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Entsprechende Versuche mit schiffsähnlichen Doppelkörpern sind im Anschluß an ähnliche, zur Zeit laufende Versuche von Amtsberg mit dreiachsigen Ellipsoiden geplant.

Eine Schwierigkeit entsteht bei solchen Vergleichen dadurch, daß man die Ergebnisse von Versuchen wegen der dabei auftretenden Zähigkeitseinflüsse den Resultaten von potentialtheoretischen Berechnungen nicht unter der Bedingung geometrischer Ähnlichkeit der Strömungsfelder gegenüberstellen kann. Ebenso wenig kann man sich auf streng ähnliche Strömungsverhältnisse beziehen, wenn man die Ergebnisse von Rechnungen (oder Versuchen) für verschiedene Schiffsformen untereinander vergleichen will. Daher muß man — wie bereits Dickmann [6] — zu der plausiblen Annahme greifen, die verschiedenen Strömungsfelder seien bei gleichem Mittelwert der Zustromgeschwindigkeit zur Propellerebene zumindest näherungsweise ähnlich und daher als äquivalent anzusehen. Hieraus folgt, daß der Parameter  $c_{sp}$  nach Gl. (4.5), der auf den Mittelwert der Zustromgeschwindigkeit bezogen ist, die für den Zweck physikalischer Vergleiche maßgebliche Kenngröße darstellt. Dabei ist im Zusammenhang mit Versuchen der mittlere Gesamtmitstrom, bei Rechnungen dagegen der Mittelwert des effektiven Verdrängungsmittstroms einzusetzen.

Wesentlich ist hierbei allerdings die gleichartige Bestimmung des Mittelwertes  $\bar{v}$  der Mitstromziffer. Dies macht insbesondere für die effektive Mitstromziffer im Modellversuch einige Schwierigkeiten, da, wie Pohl [10] sehr gründlich erläutert hat, die auf Grund von Schub- oder Momentenidentität ermittelten Mittelwerte mit dem Volumenmittel nach Gl. (4.4) nicht identisch sind, so daß mit ihrer Hilfe Vergleiche zwischen Rechnung und Messung nur behelfsweise durchführbar sind. Für verfeinerte Untersuchungen sind — wie sich aus den Ergebnissen von Abschn. 5.2 schließen läßt — die aus einer Aufmessung des nominellen Mitstromfeldes nach der Beziehung (4.4) bestimmten Werte als Kenngröße auch für das effektive Mitstromfeld und damit als Vergleichsbasis besser geeignet.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Zum Zwecke grundsätzlicher potentialtheoretischer Untersuchungen über die Umströmung eines schiffsähnlichen Körpers und über die Wechselwirkung zwischen diesem Körper und dem Propeller wird zunächst eine analytische Darstellung der Schiffsoberfläche angegeben, die es gestattet, die wichtigsten Parameter der Schiffsform systematisch zu variieren, und die durch ihren Aufbau für die Verarbeitung in elektronischen Rechenanlagen mittlerer Kapazität geeignet ist.

Dann wird die Umströmung eines tiefgetauchten Körpers beliebig gegebener Gestalt in Form der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie behandelt und mit Hilfe eines direkten Iterationsverfahrens für die Integralgleichung am Beispiel eines völligen Doppelkörpers gelöst.

Schließlich wird die mit Hilfe des Senkenscheibenmodells erzeugte Propellerströmung berücksichtigt und für einen Anordnungsfall „Körper mit Propeller“ zahlenmäßig untersucht. Hieraus ergeben sich einige Rückschlüsse auf die Wechselwirkung zwischen Schiff und Propeller.

Folgende Einzelergebnisse seien besonders hervorgehoben:

a) Die für einen schiffsähnlichen Körper für mehrere Schubbelastungsgrade durchgeführte Berechnung des nominellen und des effektiven reinen Verdrängungsmittstromfeldes gibt einen Überblick über den Einfluß des Propellers auf die Größenordnung und Verteilung des Mitstroms.

b) Der effektive Verdrängungsmittstrom ist im Mittel größer als der nominelle und zeigt eine schwache Zunahme mit steigendem Schubbelastungsgrad.

c) Die Berechnung des reinen Verdrängungssogs für den schiffsähnlichen Körper ohne und mit Berücksichtigung der Ungleichförmigkeit der Propellerzuströmung läßt die Größenordnung des Ungleichförmigkeitseinflusses auf den Sog erkennen. Bei mäßigen Schubbelastungsgraden kann dieser Effekt prozentual durchaus erheblich sein.

Über die ersten Beispielrechnungen hinaus bietet das für die durchgeführten Rechnungen entwickelte Programm für die Rechenanlage Siemens 2002 in der vorliegenden Form die Möglichkeit, noch folgende Untersuchungen vorzunehmen:

1. Berechnung des Einflusses der Parameter der Schiffsform (wie Völligkeitsgrade, Verhältnis der Hauptabmessungen, Verlauf der Spantarealkurve, Spantcharakter vor allem im Hinterschiff usw.) auf die Wechselwirkungsgrößen in einer Verdrängungsströmung.

2. Fortführung des Iterationsprozesses zwischen Körper- und Propellersingularitätenbelegung über die bisher erreichte Annäherung hinaus bis zum Gleichgewichtszustand zwischen Körper- und Propellerfeld.

3. Untersuchung verschiedener Anordnungen des Propellers zum Schiff (Propellerabstand vom Heck, Verhältnis des Propellerdurchmessers zu den Körperabmessungen usw.).

Nach der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Methode lassen sich in Erweiterung des Programms zwanglos zahlreiche weitere potentialtheoretische Aufgaben lösen wie z. B. die Be-

stimmung der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung auf der Körperoberfläche (mit und ohne Propellereinfluß), Mehrkörperprobleme in stationärer Potentialströmung usw., kurz gesagt also alle in den Bereich der zweiten Randwertaufgabe fallenden Probleme (Potentialströmung um beliebig gegebene, genügend glatte Körper in beliebigem stationärem Störfeld).

Im direkten Zusammenhang mit den hier angestellten potentialtheoretischen Untersuchungen sind zur Beantwortung offener Fragen folgende Versuche mit schiffsähnlichen Körpern von Interesse:

1. Aufmessung des nominellen Gesamtmitstromfeldes zur Beurteilung der Zähigkeitseinflüsse im schiffsähnlichen Fall.
2. Messungen des Gesamtsogs zur weiteren Klärung der Frage des Zähigkeitssogs.
3. Druckmessungen an der Körperoberfläche und Grenzschichtaufmessungen zur Überprüfung und Erweiterung der an Ersatzkörpern gewonnenen Erkenntnisse über die Schiffsgrenzschicht.

Am Schluß seiner Ausführungen möchte der Verfasser allen, die durch Rat und Tat zum Zustandekommen seiner Arbeit beigetragen haben, recht herzlich danken. Er dankt vor allem seinem Lehrer, Professor Dr.-Ing. Amtsberg, an dessen Lehrstuhl für Theorie des Schiffes der Technischen Universität Berlin die Arbeit während der Assistentenzeit des Verfassers entstanden ist. Professor Amtsberg hat den Untersuchungen des Verfassers stets großes Interesse entgegengebracht und ihr Gelingen durch viele wertvolle Anregungen und Ratschläge und durch die Bereitstellung der notwendigen Mittel großzügig gefördert. Der Verfasser dankt auch dem Sektor Mathematik des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung Berlin und seinen jederzeit hilfsbereiten Mitarbeitern für die wirksame Betreuung während der Programmierung und Abwicklung der umfangreichen numerischen Berechnungen. Er dankt schließlich der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die sein Vorhaben durch die Übernahme eines Teils der Programmierungskosten ermöglicht hat.

## 7. Schrifttum

- [1] Fresenius, R.: Das grundsätzliche Wesen der Wechselwirkung zwischen Schiffskörper und Propeller. Schiffbau 1921.
- [2] Helmbold, H. B.: Beitrag zur Theorie der Nachstromschraube, Ing.-Arch. 1931, S. 275.
- [3] Helmbold, H. B.: Schraubensog und Nachstrom, Werft-Reederei-Hafen 1938, S. 354.
- [4] Horn, F.: On the Measurement of Wake, Trans. NECI 1938, S. 251.
- [5] Dickmann, J.: Schiffskörpersog, Wellenwiderstand eines Propellers und Wechselwirkung mit Schiffswellen. Ing.-Arch. 1938, S. 452.
- [6] Dickmann, J.: Wechselwirkung zwischen Schiff und Propeller unter besonderer Berücksichtigung des Welleneinflusses. Jahrbuch der STG 1939.
- [7] Amtsberg, H.: Untersuchungen an Rotationskörpern über die Wechselwirkung zwischen Schiffskörper und Propeller. Jahrbuch der STG 1960.
- [8] Hunziker, R. R.: Hydrodynamic Influence of the Propeller on a deeply Submerged Submarine. International Shipb. Progr. 1958, S. 166.
- [9] Dreger, W.: Ein Verfahren zur Berechnung des Potentialsogs. Schiffstechnik 1959, S. 175.
- [10] Pohl, K. H.: Über die Wechselwirkung zwischen Schiff und Propeller. Jahrbuch der STG 1961.
- [11] van Lammeren, W. P. A.: Analyse der Voortstuwingscomponenten in Verband met het Schaaffect bij Scheepsmodelproeven. Veröffentlichung Nr. 32 der NSP, Wageningen, 1938.
- [12] van Lammeren, W. P. A., J. D. van Manen u. A. J. W. Lap: Scale Effect Experiments on Victory Ships and Models, TINA 1955, S. 167, (Part I)
- [13] Lap, A. J. W., u. J. D. van Manen: Scale Effect Experiments on Victory Ships and Models (Parts III and IV), International Shipb. Progr. 1961, S. 177.
- [14] Tsakonas, S., u. W. Jacobs: Potential and Viscous Parts of the Thrust Deduction and Wake Fraction for an Ellipsoid of Revolution. Journal of Ship Research Nov. 1960, S. 1.
- [15] Taylor, D. W.: Trans. Int. Eng. Congress, San Francisco 1915 (zitiert nach [18]).
- [16] Weinblum, G.: Exakte Wasserlinien und Spantflächenkurven. Schiffbau 1934, S. 120.
- [17] Weinblum, G.: Rechnerische Entwicklung von Schiffsförmern. Schiffbau 1938, S. 129, 151, 170.
- [18] Weinblum, G.: Systematische Entwicklung von Schiffsförmern. Jahrbuch der STG 1953, S. 186.
- [19] Saunders: Hydrodynamics in Ship Design, New York 1957.
- [20] Rösingh, W., u. J. Berghuis: Mathematical Shipform, International Shipb. Progr. 1959, S. 37
- [21] Kerwin, J. E.: Polynomial Surface Representation of Arbitrary Ship Forms, Journal of Ship Research 1960.
- [22] Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen, Leipzig 1952.
- [23] Pien, C.: Mathematical Ship Surface, International Shipb. Progr. 1960, S. 161.

- [24] Thieme, H.: Systematische Entwicklung von Schiffslinien. Schiff und Hafen 1952, S. 241.
- [25] Lewis, F. M.: The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship. Trans. SNAME 1929.
- [26] Kellogg, O. D.: Foundations of Potential Theory, Berlin 1929.
- [27] Rothe, R., u. W. Schmeidler: Höhere Mathematik, Teil VII, Stuttgart 1956.
- [28] Günter, N. M.: Die Potentialtheorie und ihre Anwendungen auf Grundaufgaben der mathematischen Physik, Leipzig 1957.
- [29] Schmeidler, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Leipzig 1955.
- [30] Riegels, F.: Die Strömung um schlanke, fast drehsymmetrische Körper, Mitt. aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen 1952.
- [31] Nowacki, H.: Über die wechselseitigen Kraftwirkungen zwischen schiffsähnlichen Tauchkörpern. Schiff und Hafen 1960, S. 756.
- [32] Hess, J. L., u. A. M. O. Smith: Calculation of Non-Lifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies. Report No. E. S. 40622 der Douglas Aircraft Co., 1962.
- [33] Sternberg, W.: Potentialtheorie, Sammlung Götschen.
- [34] Pöde, L.: The Formulation of Potential Flow Problems in Terms of a Fredholm Integral Equation of the Second Kind . . . Report No. 939 des David Taylor Model Basin, Washington 1956.
- [35] Stiefel, E.: Einführung in die numerische Mathematik, Stuttgart 1961.
- [36] Smith, A. M. O., u. J. Pierce: Exact Solution of the Neumann Problem; Calculation of Non-Circulatory Plane and Axially Symmetric Flows about or within Arbitrary Boundaries. Report No. E. S. 26988 der Douglas Aircraft Co., 1958.
- [37] Oseen, C. W.: Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig 1927.
- [38] Betz, A.: Singularitätenverfahren . . . Ing.-Arch. 1932, S. 454.
- [39] Korvin-Kroukovsky, B. V.: Stern Propeller Interaction with a Streamline Body of Revolution. International Shipb. Progr. 1956, S. 3.
- [40] Pohl, K. H.: Untersuchungen über nominellen und effektiven Nachstrom in der Propellerebene von Einschraubenschiffen. Schiffstechnik 1963, S. 23.

### 8. Bezeichnungen

Zeichen	Erklärung	Zeichen	Erklärung
$a_{ij}, a_{ik}$	Koeffizienten	$n_0(x, y, z) = n_0(P)$	äußerer Normaleinheitsvektor des Körpers
$A_i$	Stützspantfläche, bezogen auf Hauptspantfläche	$dO$	Oberflächenelement
$A(x)$	Spantfläche an der Stelle $x$ , bezogen auf Hauptspantfläche	$P$	Aufpunkt, Aufpunktkoordinate
$B$	Schiffsbreite	$P_i(x)$	Interpolationsfunktion
$b_0$	halbe Breite des Lewis-Spants	$\Delta p$	Differenz zwischen dem örtlichen Druck und dem Druck in ungestörter Strömung
$c_k$	Koeffizient	$Q$	Quellpunkt, Quellpunktkoordinate
$c_{S_0}$	Schubbelastungsgrad des Propellers für die Zustromgeschwindigkeit $w_0$	$q$	Staudruck
$c_S(r, \varphi)$	örtlicher Schubbelastungsgrad in der Propellerebene	$R$	radiale Koordinate in der Propellerebene
$c_{S_P}$	Schubbelastungsgrad des Propellers für die Zustromgeschwindigkeit $w_P$	$R_P$	Propellerradius
$\Delta c_{WN}$	Sogwert	$r$	Entfernung vom Quellpunkt zum Aufpunkt
$\Delta c_{WNu}$	Sogwert unter Berücksichtigung des Ungleichförmigkeitseinflusses	$r$	Koordinate in radialer Richtung, allgemein
$D_P$	Propellerdurchmesser	$r$	$= R/R_P =$ dimensionslose, radiale Koordinate in der Propellerebene
$E$	Ergiebigkeit der Einzelquelle	$\tau$	Vektor vom Quellpunkt zum Aufpunkt
$e$	Senkenergiebigkeit der Propellerbelegung je Flächeneinheit	$\tau_{OP}$	Radiusvektor zum Aufpunkt im Feld
$e_0$	Senkenergiebigkeit des Propellers in homogener Zuströmung entsprechend $\bar{\psi}_{\nabla_0 e}$	$\tau_{\psi}$	Vektor vom Quellpunkt zum Aufpunkt im Feld, insbesondere in der Propellerebene
$\Delta e(r, \varphi)$	Abweichung der Funktion $e(r, \varphi)$ von $e_0$ in die Mittschiffsebene projiziertes Quellflächenelement $dO$	$\tau_{e_{1;2}}$	Vektor vom Senkenelement in der Propellerebene zum Aufpunkt auf der Körperoberfläche
$dF_Q$		$\tau_{M_{1;2}}$	Radiusvektor zu den Mittelpunkten der beiden Senkenschraubenpropeller
$g(P)$	Störfunktion	$\tau_{P_{1;2}}$	Vektor vom Propellermittelpunkt zum Senkenelement in der Propellerebene
$g_P(P)$	Störfunktion in reiner Propellerströmung	$S$	Schub
$h$	kleine Größe	$T$	Tiefgang des Schiffes
$H$	$= b_0/t_0$	$t_0$	Tiefe des Lewis-Spants
$K(P, Q)$	Kernfunktion	$v(X, Y, Z)$	Geschwindigkeitsvektor
$K(z)$	Gleichung der Stevenkontur	$\Delta W_V$	reiner Verdrängungssog
$L$	Schiffslänge	$\Delta W_Z$	virtueller Verdrängungssog
$M$	ganze Zahl		
$n$	Koordinate in normaler Richtung		

Zeichen	Erklärung	Zeichen	Erklärung
$\Delta W^{w_e}$	Wellensog	$y_0(0, z)$	Aufmaß des Hauptspants an der Stelle $z$
$\Delta W_Z$	Zähigkeitssoog	$y_i(x_i, z)$	Stützspantaufmaß
$w_0$	Betrag der ungestörten Anströmgeschwindigkeit	$y_P, z_{P_{1,2}}$	dimensionslose kartesische Koordinaten in der Propellerebene
$w_0$	Vektor der Anströmgeschwindigkeit	$\Delta z'$	Breite des singulären Streifens
$w_{0N}$	Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit auf der Körperoberfläche	$\Delta x, \Delta z$	Schrittweite im Aufpunktraster
$w_{eN}$	Komponente der Propellerstörgeschwindigkeit normal zur Körperoberfläche	$\alpha$	Völligkeitsgrad der Schwimmlinie
$w_N$	Geschwindigkeit normal zur Körperoberfläche	$\beta$	Völligkeitsgrad des Hauptspants
$w_P$	$= w_0(1 - \bar{w}) =$ mittlere Zustromgeschwindigkeit zum Propeller	$\beta_{SpI}$	Völligkeitsgrad des Lewis-Spants
$w_P(r, \varphi)$	örtliche Zustromgeschwindigkeit zum Propeller	$\delta$	Verdrängung $(m^3)/L \cdot B \cdot T =$ Völligkeitsgrad der Verdrängung
$w_T(x, z)$	Vektor der tangential zur Körperoberfläche gerichteten Geschwindigkeit	$\epsilon$	Quellergiebigkeit der Körperbelegung, bezogen auf die Flächeneinheit
$w_{eN}$	Geschwindigkeitskomponente infolge der Schichtbelegung normal zur Körperoberfläche	$\epsilon_0$	Ausgangsnäherung für $\epsilon$
$w_s(x, z)$	Vektor der von der Schichtbelegung induzierten Geschwindigkeit	$\epsilon_n(P)$	Näherungslösungen für $\epsilon$
$\Delta w_{eN}(P)$	Beitrag des singulären Bereichs zur Normalgeschwindigkeit auf der Körperoberfläche	$\epsilon_{n+1}(P)$	
$X, Y, Z$	kartesische, vom Punkt auf halber Länge und halber Breite der Schwimmlinie aus zählende Koordinaten	$\epsilon_{n+2}(P)$	
$X', Y', Z'$	Quellpunktkoordinaten	$\epsilon_P$	Quellergiebigkeit der Körperbelegung, bezogen auf die Flächeneinheit, in reiner Propellerströmung
$X_P, Z_P$	Koordinaten des Propellermittelpunkts	$\epsilon_{P0}$	Ausgangsnäherung für $\epsilon_P$
$x, y, z$	dimensionslose kartesische Koordinaten, Ursprung wie bei $X, Y, Z$	$\kappa$	$= \varphi/\alpha$
$x', y', z'$	dimensionslose Quellpunktkoordinaten	$\rho$	Dichte
$x_0, z_0$	feste Koordinatenwerte (in der Nähe des Aufpunkts),	$\Phi(X, Y, Z)$	Potential
$x_P, z_P$	dimensionslose Koordinaten des Propellermittelpunkts	$\Phi_i(z)$	Orthogonalfunktion in $z$
$y(x, z)$	Aufmaß der Schiffsoberfläche	$\varphi$	Winkelcoordinate in der Propellerebene
		$\varphi$	$=$ Verdrängung $(m^3)/L \cdot B \cdot T \cdot \beta =$
		$\Psi_i(x)$	$=$ Schärfeegrad
		$\psi$	Orthogonalfunktion in $x$
		$\psi_{V_0}$	Mitstromziffer, allgemein
		$\psi_{V_{0e}}$	Ziffer des reinen nominellen Verdrängungsmittstroms
		$\bar{\psi}_{V_{0e}}$	Ziffer des reinen effektiven Verdrängungsmittstroms
		$\Delta \psi_{V_{0e}}(r, \varphi)$	mittlere reine effektive Verdrängungsmittstromziffer
			Schwankung von $\psi_{V_{0e}}$ um den Mittelwert

## 9. Anhang

### 9.1 Darstellung und Eigenschaften von Lewis-Spanten

Im folgenden sei hier eine kurze Erläuterung und Ergänzung der Gedankengänge von Lewis [25] gegeben, soweit sie sich auf die Spantdarstellung beziehen und soweit sie für die vorliegende Arbeit von Bedeutung sind.

Mit der Abbildungsfunktion

$$w = z + \frac{a}{z} + \frac{b}{z^3} \quad (9.1)$$

wird ein Einheitskreis der  $z$ -Ebene auf eine spantförmige Figur in der  $w$ -Ebene abgebildet.

Der Einheitskreis in der  $z$ -Ebene hat die Gleichung:

$$z = x + iy = r e^{i\theta} = e^{i\theta} \quad (9.2)$$

Daher ergibt sich in der  $w$ -Ebene die folgende Gleichung für den Lewis-Spant:

$$w = X + iY = z + \frac{a}{z} + \frac{b}{z^3} = e^{i\theta} + a e^{-i\theta} + b e^{-3i\theta} \quad (9.3)$$

Durch Vergleich der Real- und Imaginärteile erhält man die vom Parameter  $\theta$  abhängige Funktionsdarstellung des Spants:

$$X = (1 + a) \cos \theta + b \cos 3\theta \quad (9.4)$$

$$Y = (1 - a) \sin \theta - b \sin 3\theta \quad (9.5)$$

Für  $\theta = 0$  ergibt sich die Tiefe des Spants (s. Abb. 3):

$$t_0 = 1 + a + b \text{ mit } Y = 0 \quad (9.6)$$

und für  $\Theta = \pi/2$  die größte Halbbreite des Spants:

$$b_0 = 1 - a + b \text{ mit } X = 0 \quad (9.7)$$

Das Verhältnis von halber Breite zur Tiefe beträgt also:

$$H = \frac{b_0}{t_0} = \frac{1 - a + b}{1 + a + b} \quad (9.8)$$

Normiert man die Gln. (9.4) und (9.5) mit der Tiefe  $t_0$  so erhält man:

$$x^* = \frac{X}{t_0} = \frac{(1 + a) \cos \Theta + b \cos 3 \Theta}{1 + a + b} \quad (9.4a)$$

$$y^* = \frac{Y}{t_0} = \frac{(1 - a) \sin \Theta - b \sin 3 \Theta}{1 + a + b} \quad (9.5a)$$

Die freien Koeffizienten  $a$  und  $b$  des Ansatzes (9.1) sind aus zwei vorzugebenden Bedingungen zu bestimmen. Von Lewis wie auch im vorliegenden Zusammenhang werden das Seitenverhältnis  $H$  und die Fläche des Spants vorgegeben. Um die Fläche des Halbspants zu bestimmen, bedient man sich zweckmäßig der Definition der Fläche durch ein Umlaufintegral:

$$F = \frac{1}{2} \oint (X dY - Y dX) \quad (9.9)$$

oder für die hier gegebene Parameterdarstellung  $X = f(\Theta)$ ;  $Y = g(\Theta)$ :

$$F = \frac{1}{2} \oint (X Y' - Y X') d\Theta, \quad (9.10)$$

wobei

$$X' = \frac{dX}{d\Theta} \text{ und } Y' = \frac{dY}{d\Theta} \quad (9.10a)$$

Da längs der geraden Ränder (s. Abb. 3) entweder  $X = X' = 0$  (WL-Ebene) oder  $Y = Y' = 0$  (Mittschiffsebene), trägt nur das Linienintegral längs des gekrümmten Randes (Spantkontur) zur Fläche bei, und man erhält:

$$F = \frac{1}{2} \int_{\Theta=0}^{\Theta=\pi/2} (X Y' - Y X') d\Theta \quad (9.11)$$

Durch Einsetzen der Funktionen nach den Gln. (9.4a) und (9.5a) und ihrer Ableitungen gelangt man nach einigen Zwischenrechnungen zu dem Ergebnis für die Fläche des Halbspants:

$$F = \frac{\pi}{4} t_0^2 \frac{(1 - a^2 - 3b^2)}{(1 + a + b)^2} \quad (9.12)$$

Für den Völligkeitsgrad des betreffenden Spants erhält man damit:

$$\beta_{Spt} = \frac{F}{b_0 t_0} = \frac{\pi}{4H} \cdot \frac{1 - a^2 - 3b^2}{(1 + a + b)^2} \quad (9.13)$$

Sind der Hauptspantvölligkeitsgrad  $\beta$  und die dimensionslose Spantfläche  $A_i = F/0,5 \cdot B \cdot T \cdot \beta$  gegeben, so läßt sich  $\beta_{Spt}$  nach elementarer Umrechnung ermitteln:

$$\beta_{Spt} = A_i \cdot \beta \cdot \frac{0,5 \cdot B \cdot T}{b_0 \cdot t_0} \quad (9.14)$$

Nunmehr lassen sich  $a$  und  $b$  aus den Gln. (9.8) und (9.13) für die gegebenen Größen  $\beta_{Spt}$  und  $H$  bestimmen (vgl. Gl. 2.26).

Von Bedeutung sind im Zusammenhang dieser Arbeit noch die Ableitungen der Spanten:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dX} = \frac{\frac{dY}{d\Theta}}{\frac{dX}{d\Theta}} = \frac{Y'}{X'} \quad (9.15)$$

Hierfür ergibt sich durch Differenzieren der Beziehungen (9.4) und (9.5):

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(1 - a) \cos \Theta - 3b \cos 3 \Theta}{-(1 + a) \sin \Theta - 3b \sin 3 \Theta} \quad (9.16)$$

Geht man schließlich wieder auf das dimensionslose Koordinatensystem  $x, y, z$  nach Gl. (2.1) über und bedenkt, daß die  $X$ -Achse der  $w$ -Ebene der  $z$ -Achse des Schiffskörpers entspricht, so erhält man die Transformationsbeziehungen:

$$y = \frac{Y}{B/2} = \frac{t_0}{B/2} \cdot \frac{Y}{t_0} = \frac{t_0}{B/2} y^* \quad (9.17)$$

$$z = \frac{X}{T} = \frac{t_0}{T} \cdot \frac{X}{t_0} = \frac{t_0}{T} x^* \quad (9.18)$$

mit  $x^*$  und  $y^*$  nach den Gln. (9.4a) und (9.5a) und ferner

$$y_z = \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{d(Y/0,5 \cdot B)}{d(Z/T)} = \frac{T}{B/2} \cdot \frac{dY}{dX} \quad (9.19)$$

## 9.2 Vergleich mit dem Verfahren von Hess und Smith

Es erscheint zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit und der Anwendungsmöglichkeiten des in der vorliegenden Arbeit benutzten Iterationsverfahrens zur Lösung der Integralgleichung (3.13) angebracht, es mit dem von Hess und Smith [32] angewandten in Vergleich zu setzen und dabei einige Bemerkungen über den erforderlichen Rechenaufwand zu machen.

Nach einer ersten Arbeit von Smith und Pierce [36] aus dem Jahre 1958, die sich mit dem zweidimensionalen und dem rotationssymmetrischen Umströmungsproblem befaßt, erschien 1962 ebenfalls als Bericht der Douglas Aircraft Co. eine Untersuchung von Hess und Smith [32] über die numerische Behandlung der räumlichen Randwertaufgabe für beliebig gegebene Körperform. Die Verfasser gehen ebenfalls von einer Integralgleichung der Form

$$\varepsilon(P) + \iint_O \varepsilon(Q) \cdot K(P, Q) dO = g(P) \quad (9.20)$$

aus und gelangen entsprechend zur Bestimmung der Quellbelegung und des resultierenden Strömungsfeldes. Jedoch behandeln sie zu diesem Zweck die Integralgleichung nicht unmittelbar in einem Iterationsprozeß nach Art von Gl. (3.18), sondern sie wird näherungsweise in ein lineares Gleichungssystem von endlich vielen Unbekannten überführt, so daß sich  $(m \cdot n)$  Gleichungen von der analog zu (9.20) aufgebauten Form:

$$\varepsilon_{ij}(P) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}(Q) \cdot K_{ij}(P, Q) \cdot \Delta O_{ij} = g_{ij}(P) \quad (9.21)$$

ergeben. In geometrischer Interpretation bedeutet dieser Näherungsschritt die Auflösung der Körperoberfläche in eine Anzahl von endlich großen Oberflächenelementen  $\Delta O_{ij}$ , in denen jeweils die Quellintensität konstant gehalten wird<sup>1</sup>.

Die Aufgabe, die Quellbelegung auf der Körperoberfläche zu bestimmen, wird somit auf die Auflösung des Gleichungssystems (9.21) zurückgeführt, wobei die  $K_{ij}(P, Q) \cdot \Delta O_{ij}$  und  $g_{ij}(P)$  zwei durch Körperform und Anströmung gegebene Koeffizientenmatrizen darstellen.

Der sich unter Umständen erhebende Einwand, der Ersatz der Integralgleichung durch ein endliches Gleichungssystem führe im Prinzip zu weniger genauen Endergebnissen, ist nicht berechtigt. Einerseits läßt sich bei der algebraischen Methode die Zahl der Stützstellen  $(m \cdot n)$  durch Verfeinerung des Rasters steigern, bis die gewünschte Gesamtgenauigkeit erreicht ist. Zum anderen wird auch bei der hier verwendeten Integralgleichungsmethode die Auswertung der Integrale praktisch als Summation ausgeführt; schließlich kann beim letztgenannten Verfahren die Anzahl der Aufpunkte ebenfalls nur endlich groß gewählt werden.

Die praktischen Möglichkeiten, das Gleichungssystem (9.21) zu lösen, hängen allerdings in ausschlaggebendem Maße von der Beschaffenheit der gegebenen Koeffizientenmatrizen ab. Dies gilt um so mehr, als für die Erfassung der Quellbelegung von schiffsähnlichen Formen gewöhnlich eine sehr hohe Anzahl von Stützstellen mit unbekannter Quellintensität gewählt werden muß, und daher — wie bekannt — bei der Auflösung eines entsprechenden Gleichungssystems mit sehr vielen Unbekannten mit größeren Stellengenauigkeitsverlusten zu rechnen ist. Nach den Erfahrungen von Hess und Smith war nun aber die Hauptdiagonale der gegebenen Koeffizientenmatrix  $K_{ij}(P, Q) \cdot \Delta O_{ij}$  meist so stark überwiegend, daß selbst in Fällen mit mehr als 1000 Unbe-

<sup>1</sup> Es spielt in diesem Zusammenhang keine Rolle, daß die Kernfunktion und das Flächenelement bei Hess und Smith eine geringfügig andere Bedeutung haben als in der vorliegenden Arbeit, da nämlich dort in krummlinigen Koordinaten über die Körperoberfläche, hier in kartesischen Koordinaten über die Mittellängsebene integriert wird.



kannten die Lösbarkeit des Gleichungssystems gewährleistet war. Da diese Matrix von der Körperform bestimmt wird, sollte man diese Erfahrungen allerdings erst nach tieferreichender Überprüfung verallgemeinern.

Da mit den beiden Verfahren also in den meisten Fällen gleichwertige Ergebnisse zu erzielen sein dürften, hat man sie nunmehr noch unter dem Gesichtspunkt des bei gleicher Genauigkeit notwendigen Aufwandes zu vergleichen. Dies setzt normalerweise die Durchführung von gleichwertigen Rechnungen nach beiden Methoden mit einer gleichartigen Maschine voraus. Da jedoch fraglich ist, ob eine solche an sich sehr lohnende Untersuchung zustande kommt, soll versucht werden, die vom Verfasser auf der Anlage Siemens 2002 des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung Berlin abgewickelten Rechnungen mit den amerikanischen, für einen ebenfalls schiffsähnlichen, durch 506 Quellelemente erzeugten Körper auf der Anlage IBM 7090 durchgeführten zu vergleichen, und zwar lediglich in bezug auf den beim Lösen der Gleichungen unmittelbar erforderlichen Zeitaufwand, da sämtliche vorbereitenden und nachträglichen Rechnungen (wie die Kernberechnung und die Ermittlung des Strömungsfeldes) unter allzu unterschiedlichen Nebenbedingungen erfolgt sind. Für die Auflösung der Integralgleichung (3.18) einerseits und des linearen Gleichungssystems (9.21) andererseits wurden von der Siemens-Anlage etwa 14 h, von der IBM 7090 etwa 1 h 20 min gebraucht. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß die IBM 7090 nach einem aus arithmetischen und logischen Operationen geschätzten Mittelwert mit der etwa 50-fachen Rechengeschwindigkeit arbeitet, so daß sich bei Umrechnung auf die Geschwindigkeit der langsameren Siemens 2002 Rechenzeiten von 14 h und etwa 67 h gegenüberstehen. Daher ergeben sich auch bei vorsichtiger Beurteilung wegen der nicht ganz gleichwertigen Endgenauigkeit allem Anschein nach einige Vorteile bei der direkten, in der vorliegenden Arbeit verwendeten iterativen Lösung der Integralgleichung.